西安交通大学研究生课程“张量分析及其工程应用”

目　　录

第〇章　引言

0.1 参考书目

1、王甲升，张量分析及其应用，1982 年，1987 年，高等教育出版社
2、郭日修，弹性力学与张量分析，2003 年，高等教育出版社
3、Flugge W，Tensor analysis and continuum mechanics，1972，Springer—Verlag，白铮译，张量分析与连续介质力学，1980 年，中国建筑工业出版社
4、张若京，张量分析教程，2004 年，同济大学出版社
5、吕盘明，张量算法简明教程，2004 年，中国科学技术大学出版社
6、黄克智等，张量分析，1986 年，2003 年，清华大学出版社
7、刘高联，叶轮机械气体动力学基础，1980 年，机械工业出版社
8、王仲奇，透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础，1983 年，机械工业出版社
9、王尚锦，离心压缩机三元流动理论及应用，1991 年，西安交通大学出版社

0.2 张量的概念

- 各种物理量在空间上的数学表示。
  - 物理量：流固热电磁光；物理量与物理定律的客观性，不以人们的意志为转移的。
  - 空间：欧氏空间，黎曼空间，三维，有限维。
  - 数学表示：坐标系选择。参考系的选择对研究方法的繁简有重要影响。
  - 不同坐标系下的物理量分量满足一定变换关系。
- 其中不随坐标系变换而改变的张量，称为绝对张量，否则为伪张量。
- 张量分析及其工程应用：研究张量基本概念，基本运算，基本应用的学科。是沟通物理模型到数学模型的桥梁。

0.3 张量分析的发展历史

年代	人物	内容
19 世纪	Gauss, Riemann, Christoffel	微分几何
～1900	Ricci	张量分析
～1900	Voigt	晶体物理
1916	Einstein	广义相对论
1972	Flugge	张量分析与连续介质力学
～1980	吴仲华	流面理论的张量表示
2004	郑泉水	张量函数表示理论与材料本构方程不变性研究

0.4 课程内容

0.4.1 课程体系

1、笛卡尔张量分析
2、任意曲线坐标系下张量分析
3、曲面上的张量分析
4、张量分析在流体力学中的应用
5、张量分析在叶轮机械中的应用

6、张量分析在固体力学中的应用

0.4.2 课程重点

1、绝对张量的解析定义式
2、协变分量、逆变分量
3、各向同性张量
4、任意曲线坐标系下的张量分析
5、任意曲线坐标系下的气动方程
6、提高论文的阅读写作水平

0.5 课程特色——SUPER TA

Simple Useful Popular Easy Refreshing Tenser Analysis

0.6 张量符号优点

1、简单明了
2、可以满足客观规律不随坐标系而改变的目的

0.7 叶轮机械气体动力学知识层次结构及进展

基础课（数学，力学）
　专业基础课（流体力学，传热学，工热）
　　原理课：流体机械原理
　　　张量分析
　　　　叶轮机械气动力学理论基础（控制方程组及简化）
　　　　　叶轮机械内流数值方法（流线曲率法，通流理论，有限元，）
　　　　　　计算流体力学
　　　　　　　计算方法程序设计

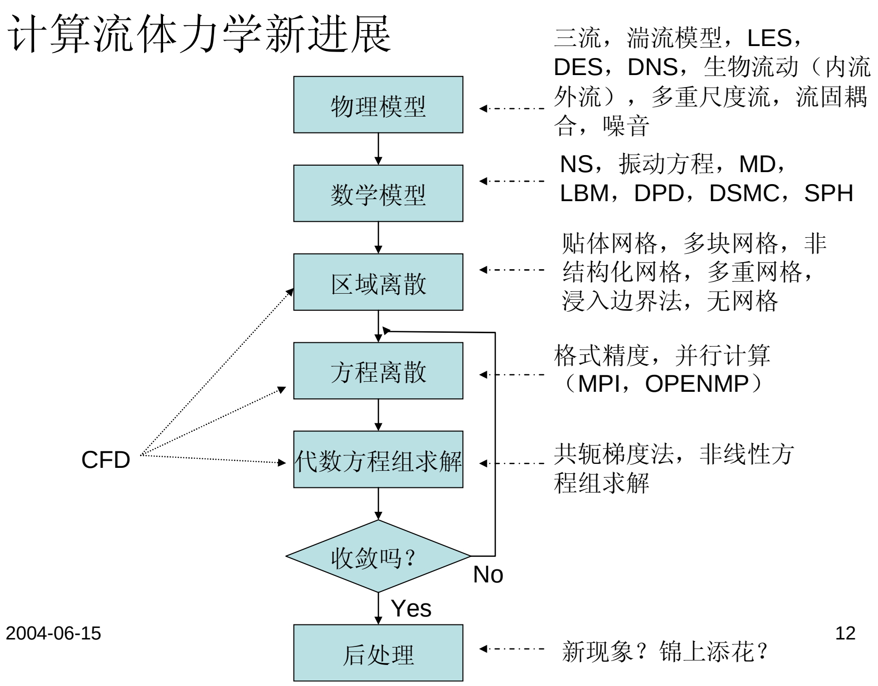
物理概念要清楚，数学力学基础要扎实

时间维：
全四维（三维非定常流，多种旋转坐标法，混合平面法，滑移网格法，动态网格）
　全三元（定常三维流）
　　准三元（nS1×S2m）
　　　两类流面（s1,s2）
　　　　两元（平面 圆柱面）
　　　　　一元（速度三角型）

空间维：
机组（多轴、多缸、多级）
　整级（进气段、叶轮、扩压器、弯道、回流器）
　　单通道（叶轮）
　　　平面叶栅（s1,s2）
　　　　孤立翼型

中国叶轮机械气体动力学研究水平：
吴仲华两类流面理论 1950－1980 国际一流
　刘高联变分有限元、气动命题，王仲奇弯掠扭叶片，～1990，国际领先
　　算法（粘性流、非结构化网格、贴体网格、动静干涉）～2000，5 年差距
　　　设计、扩稳、气弹，当下，差距在拉大。

0.8 计算流体力学进展



0.9 工业界对计算流体力学的挑战

1、Can we trust the results?

2、Can we get the results in time?

3、 Is it easy enough to use for engineer?

4、 How much time is lost in between individual CAE tools?

5、 How do we use it in our process?

关键科学问题：湍流模型（复杂流动、高速、高温、转捩、非定常）

格式精度（高阶、稳定性、边条处理）

工业界并不指望所有的理论问题都解决以后才能用 CFD 进行模拟，也并不指望 CFD 能解决所有的问题。

第一章 概 述

1.1 流体力学中常见的张量

0 阶张量（即标量） 如 ρ、T、p 等。

描述 0 阶张量所需要的量的个数为 $3^0=1$ 个。

1 阶张量（即矢量） 如 $\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$、$\vec{F}$、$\nabla\phi$、$\nabla\times\vec{V}$、$\nabla\cdot P$、$\nabla\cdot S$ 等。

描述 1 阶张量所需要的量的个数为 $3^1=3$ 个。

2 阶张量 如 应力张量 P、位移张量 D、变形率张量 S 等。

描述 2 阶张量所需要的量的个数为 $3^2=9$ 个。

3 阶张量 如 置换符号 ε、∇P 等。

描述 3 阶张量所需要的量的个数为 $3^3=27$ 个。

4 阶张量 如 弹性系数 E_{ijkl} 等。

描述 4 阶张量所需要的量的个数为 $3^4=81$ 个。

1.2 物理恒量

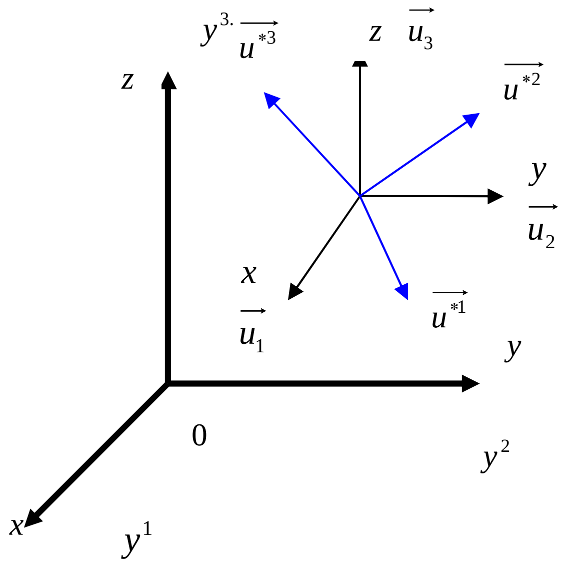
与坐标系变换无关的物理量，对应的张量为绝对张量。

1.3 坐标系分类及坐标变换

1.3.1 笛卡尔坐标系

定义：空间直线正交坐标系，坐标分量记为 $y^i:(y^1,y^2,y^3)=(x,y,z)$，坐标单位

基矢量记为 $\vec{u}_i:(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



$\vec{u}_i$ 特点：

$\dfrac{\partial \vec{u}_i}{\partial y^j}=0$，其中，$\vec{u}_i$ 为基矢量

由于各坐标轴相互单位正交，有

$$\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=\begin{cases}0\,, & i\neq j\text{ 时}\\ 1\,, & i=j\text{ 时}\end{cases}$$

新旧坐标之间的关系：

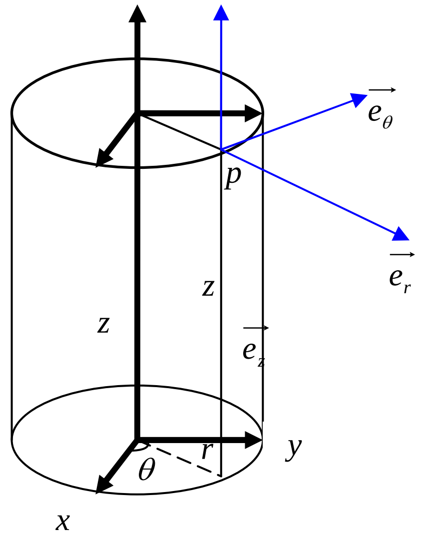
$oy^1y^2y^3\rightarrow oy^{*1}y^{*2}y^{*3}$

即 $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)\rightarrow\left(\overrightarrow{u_1^*},\overrightarrow{u_2^*},\overrightarrow{u_3^*}\right)$

$$\overrightarrow{u_1^*}=\alpha_{11}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{12}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{13}\overrightarrow{u_3}$$

$$\overrightarrow{u_2^*}=\alpha_{21}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{22}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{23}\overrightarrow{u_3}$$

$$\overrightarrow{u_3^*}=\alpha_{31}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{32}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{33}\overrightarrow{u_3}$$



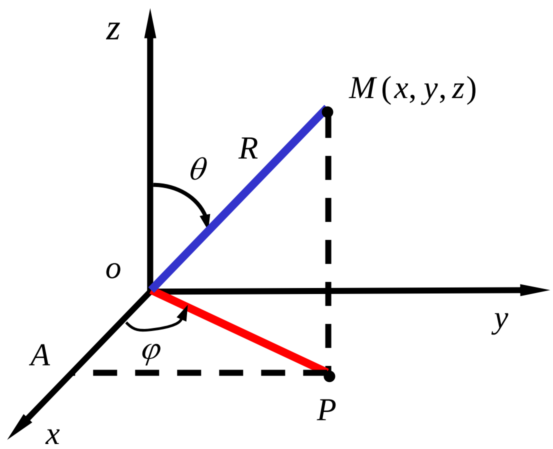
1.3.2 任意曲线坐标系

定义：$x^i=x^i(y^1,y^2,y^3)$

- 圆柱坐标系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

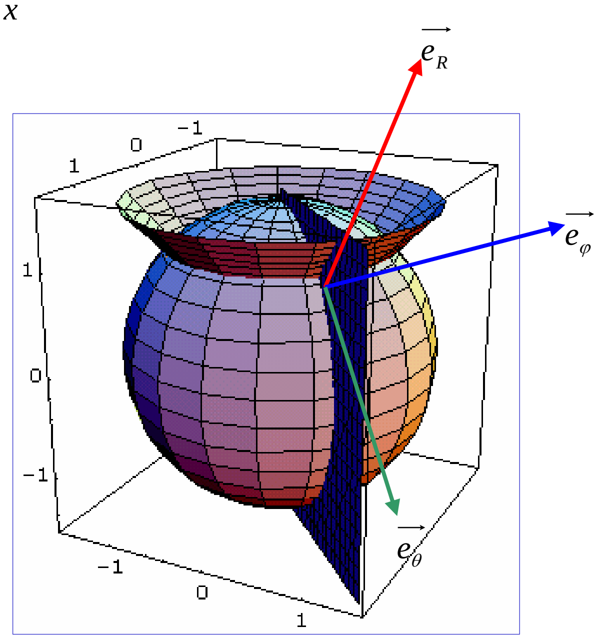
- 球坐标系



$$\begin{cases}x=R\sin\theta\cos\varphi\\ y=R\sin\theta\sin\varphi\\ z=R\cos\theta\end{cases}$$

坐标基本矢量：$\vec{e}_i=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^i}$

坐标变换：$x^{*i}=x^{*i}(x^1,x^2,x^3)$



1.4 单位正交变换（旋转，反射）

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_1^*}=\alpha_{11}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{12}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{13}\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{u_2^*}=\alpha_{21}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{22}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{23}\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{u_3^*}=\alpha_{31}\overrightarrow{u_1}+\alpha_{32}\overrightarrow{u_2}+\alpha_{33}\overrightarrow{u_3}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1^*}\\ \overrightarrow{u_2^*}\\ \overrightarrow{u_3^*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{u_2}\\ \overrightarrow{u_3}\end{pmatrix}\qquad(1)$$

转置(1)式，有

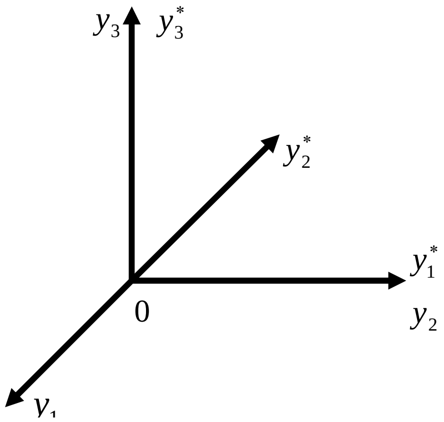
$$\begin{pmatrix}\vec{u_1^*} & \vec{u_2^*} & \vec{u_3^*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{pmatrix}(2)$$

(1)*(2)，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{pmatrix}=AA^T$$ 注意：$\alpha_{ij}\neq\alpha_{ji}$

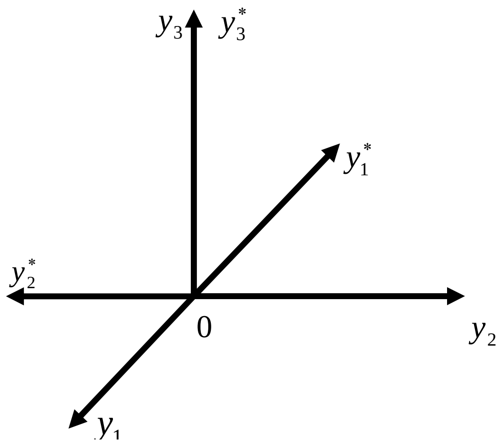
- 几类坐标变换

1、绕 oy_3 轴旋转 90°（单位正交变换）



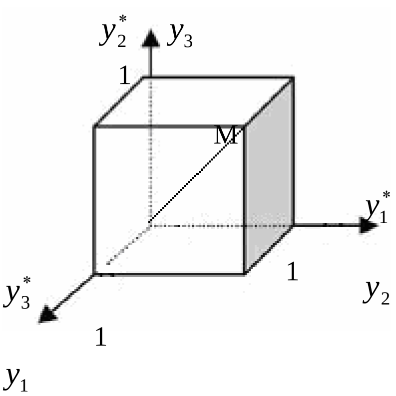
α_{ij}	$\vec{u_1}$	$\vec{u_2}$	$\vec{u_3}$
$\vec{u_1^*}$	0	1	0
$\vec{u_2^*}$	-1	0	0
$\vec{u_3^*}$	0	0	1

2、绕 oy_3 轴旋转 180°



α_{ij}	$\vec{u_1}$	$\vec{u_2}$	$\vec{u_3}$
$\vec{u_1^*}$	-1	0	0
$\vec{u_2^*}$	0	-1	0
$\vec{u_3^*}$	0	0	1

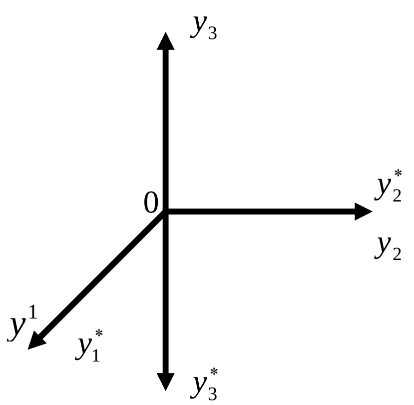
3、绕 om 轴旋转 120°



α_{ij}	$\vec{u_1}$	$\vec{u_2}$	$\vec{u_3}$
$\vec{u_1^*}$	0	1	0

$\overrightarrow{u_2^*}$	0	0	1
$\overrightarrow{u_3^*}$	1	0	0

4、oy_3 沿 oy_1y_2 面进行反射



α_{ij}	$\overrightarrow{u_1}$	$\overrightarrow{u_2}$	$\overrightarrow{u_3}$
$\overrightarrow{u_1^*}$	1	0	0
$\overrightarrow{u_2^*}$	0	1	0
$\overrightarrow{u_3^*}$	0	0	-1

1.5 记号

1、$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_ib_i$　　　（爱因斯坦求和约定）

式中 i 叫做求和指标，又叫哑指标。

$$A\vec{a}=\vec{b}$$

即 $b_i=A_{ij}a_j=A_{i1}a_1+A_{i2}a_2+A_{i3}a_3$

式中 i 叫做指定指标或自由指标，j 为哑指标。

2、克罗尼克符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\,, & i=j\text{ 时}\\ 0\,, & i\neq j\text{ 时}\end{cases}$$

3、置换符号

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1\,, & \text{i,j,k 为偶排列。如（1，2，3），（2，3，1），（3，1，2）等}\\ -1\,, & \text{i,j,k 为奇排列。如（2，1，3），（1，3，2），（3，2，1）等}\\ 0\,, & \text{i,j,k 不成排列。如（1，1，2），（1，1，1）等}\end{cases}$$

- 公式：$\delta_{ij}=\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j}$

$$\varepsilon_{i,j,k}=\overrightarrow{u_i}\cdot\left(\overrightarrow{u_j}\times\overrightarrow{u_k}\right)$$

例如：$\overrightarrow{u_3}\cdot\left(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right)=1$　　　（3，1，2）为偶排列

$\overrightarrow{u_3}\cdot\left(\overrightarrow{u_2}\times\overrightarrow{u_1}\right)=-1$　　　（3，2，1）为奇排列

4、$\varepsilon-\delta$ 恒等式

$$\varepsilon_{ijk}=\overrightarrow{u_i}\cdot\left(\overrightarrow{u_j}\times\overrightarrow{u_k}\right)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{u_j}\cdot\overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_j}\cdot\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_j}\cdot\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{u_k}\cdot\overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_k}\cdot\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_k}\cdot\overrightarrow{u_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3}\\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3}\\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3}\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3}\\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3}\\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

几种特殊情况：

1、一个下标相等，例如 $k=r$ 时

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk}\end{vmatrix}$$

$$=3\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}\right)-\delta_{kq}\left(\delta_{ip}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jp}\right)-\delta_{kp}\left(\delta_{ik}\delta_{jp}-\delta_{iq}\delta_{jk}\right)$$

$$=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jp}\end{vmatrix}$$

2、两个下标相等，例如 $k=r,q=j$ 时

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ij}\\ \delta_{jp} & \delta_{jj}\end{vmatrix}=3\delta_{ip}-\delta_{ij}\delta_{jp}=2\delta_{ip}$$

3、三个下标相等，则 $p=i,q=j,k=r$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{ii}=6$$

第二章 笛卡尔张量分析

2.1 矢量的代数及微分运算

2.1.1 矢量分解（平行四边形法则）

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + a_3\overrightarrow{u_3}$$

2.1.2 矢量相等

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$$

2.1.3 矢量代数运算

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_i \pm b_i)\overrightarrow{u_i}$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_i)\overrightarrow{u_i}$$

点乘 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i\overrightarrow{u_i}\cdot b_j\overrightarrow{u_j} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

叉乘 $\vec{a}\times\overleftarrow{b} = a_i\overrightarrow{u_i}\times b_j\overrightarrow{u_j} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \overrightarrow{u_k} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

数性二重积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\overrightarrow{u_i}\cdot\left(b_j\overrightarrow{u_j}\times c_k\overrightarrow{u_k}\right)$

$$= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

矢性二重积 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_q\overrightarrow{u_q}\times\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{u}_k$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} a_q b_i c_j \overrightarrow{u_p}$$

$$= \left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\right) a_q b_i c_j \overrightarrow{u_p}$$

$$= a_j b_i c_j \overrightarrow{u_i} - a_i b_i c_j \overrightarrow{u_j}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

并矢 $\vec{a}\vec{b} = a_i b_j \vec{u}_i \vec{u}_j$

例：$\overrightarrow{u_i^*}\cdot\overrightarrow{u_j} = \alpha_{ij} \Rightarrow \overrightarrow{u_j} = \alpha_{ij}\cdot\overrightarrow{u_i^*}, \overrightarrow{u_i^*} = \alpha_{ij}\overrightarrow{u_j}$

$$\because \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\therefore \vec{u_j}\cdot\vec{u_k}=\alpha_{ij}\vec{u_i^*}\cdot\vec{u_l^*}\alpha_{lk}=\alpha_{ij}\delta_{il}\alpha_{lk}=\alpha_{ij}\alpha_{ik}$$

而$\alpha_{ij}\alpha_{ki}$就没有这一性质了。

2.1.4 矢量的微分运算

$$\nabla=\vec{u_1}\frac{\partial}{\partial y_1}+\vec{u_2}\frac{\partial}{\partial y_2}+\vec{u_3}\frac{\partial}{\partial y_3}=\vec{u_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$\vec{A}=A_j\vec{u_j}$ （$\vec{A}=\vec{A}(y_1,y_2,y_3)$是空间向量）

矢量散度 $\nabla\cdot\vec{A}=\vec{u_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}(A_j\vec{u_j})=\vec{u_i}\cdot\vec{u_j}\frac{\partial A_j}{\partial y_i}=\delta_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial y_i}=\frac{\partial A_i}{\partial y_i}$

标量梯度 $\nabla\phi=\vec{u_i}\frac{\partial\phi}{\partial y_i}$

矢量梯度 $\nabla\times\vec{A}=\vec{u_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\times\left(A_j\vec{u_j}\right)=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_j}{\partial y_i}\vec{u_k}$

$$=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

2.1.5 微分算子的物理意义

梯度：（1）空间分布的不均匀程度；（2）沿空间变化最快的方向

散度：单位体积的膨胀率

旋度：单位体积内质点的旋转强度

2.1.6 矢量场的分类

①螺管场——散度为零的矢量场

$\nabla\cdot\vec{A}=0$；

$$\vec{A}=\nabla\times\vec{\Psi}=\begin{vmatrix} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ 0 & 0 & \Psi_3 \end{vmatrix}=\vec{u_1}\frac{\partial\Psi_3}{\partial y_2}-\vec{u_2}\frac{\partial\Psi_3}{\partial y_1}$$

②无旋场——旋度为零的矢量场

$\nabla\times\vec{A}=\vec{0}$；

$\vec{A}=\nabla\phi$，ϕ为一势函数

③Laplacian 场

$\nabla\cdot\vec{A}=0$ 且 $\nabla\times\vec{A}=\vec{0}$

2.2 绝对矢量

2.2.1 绝对矢量

定义：对于任意的坐标变换，如满足 $\overrightarrow{A^*}=\vec{A}$，则 A 为绝对矢量。

2.2.2 定理

$\vec{A}$ 为绝对矢量的充要条件是 $A_i^*=\alpha_{ij}A_j$

证明：必要性

已知 $\overrightarrow{A^*}=\vec{A}$

$$A_i^*=\vec{A}^*\cdot\vec{u}_i^*=\vec{A}\cdot\vec{u}_i^*=A_j\vec{u}_j\cdot\vec{u}_i^*=\alpha_{ij}A_j$$

充分性

$$\overrightarrow{A^*}=A_i^*\overrightarrow{u_i^*}=\alpha_{ij}A_j\overrightarrow{u_i^*}=A_j\overrightarrow{u_j}=\vec{A}$$

2.2.3 举例

Ex1、力 $\vec{F}$ 为绝对矢量。

证明： $\vec{F}=F_1\overrightarrow{u_1}+F_2\overrightarrow{u_2}+F_3\overrightarrow{u_3}=F_j\overrightarrow{u_j}$

$$F_i^*=F_j\overrightarrow{u_j}\cdot\overrightarrow{u_i^*}=\alpha_{ij}F_j$$

$\therefore$ 力为绝对矢量

Ex2、质点的位置矢量 $\overrightarrow{r_{p(t)}}$，速度 $\vec{v}=\dfrac{D\overrightarrow{v_p}}{Dt}$ 及加速度 $\vec{a}=\dfrac{D\vec{v}}{Dt}$ 都为绝对矢量。

证明： $\overrightarrow{r_p}=y_{i(t)}\overrightarrow{u_i}$

$$y_i^*=\alpha_{ij}y_j$$

$$\overrightarrow{v^*}=\frac{D\overrightarrow{r_p^*}}{Dt}=\frac{Dy_i^*}{Dt}\overrightarrow{u_i^*}=\frac{Dy_j}{Dt}\alpha_{ij}\overrightarrow{u_i^*}=\frac{Dy_j}{Dt}\cdot\overrightarrow{u_j}=\vec{v}$$

同理，加速度也是绝对矢量。

Ex3、已知 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 为绝对矢量，试证明 $\vec{A}\times\vec{B}$ 为伪矢量。

证明： $\overrightarrow{C^*}=\overrightarrow{A^*}\times\overrightarrow{B^*}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{u_1^*} & \overrightarrow{u_2^*} & \overrightarrow{u_3^*}\\ A_1^* & A_2^* & A_3^*\\ B_1^* & B_2^* & B_3^*\end{vmatrix}$ （利用反射变换）

$$=\begin{vmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & -\overrightarrow{u_3} \\ A_1 & A_2 & -A_3 \\ B_1 & B_2 & -B_3 \end{vmatrix} = -\vec{A}\times\vec{B}$$

Ex4、已知$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$为绝对矢量，则$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$为绝对矢量。

分析：要证明该题目，需先证明

$\vec{A}$、$\vec{B}$为绝对矢量，则$\vec{A}\cdot\vec{B}$为绝对标量。

证明：$\overrightarrow{A^*}\cdot\overrightarrow{B^*} = A_i^*\cdot B_i^* = \alpha_{ij}A_j\alpha_{ik}B_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik}A_jB_k$

$$=\delta_{jk}A_jB_k = A_kB_k = \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\therefore \overrightarrow{A^*}\times\left(\overrightarrow{B^*}\times\overrightarrow{C^*}\right) = \left(\overrightarrow{A^*}\cdot\overrightarrow{C^*}\right)\overrightarrow{B^*} - \left(\overrightarrow{A^*}\cdot\overrightarrow{B^*}\right)\overrightarrow{C^*}$$

矢性二重性

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$=\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

Ex5、已知$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$为绝对矢量，证明$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$为伪标量。

证明：$\overrightarrow{A^*}\cdot\left(\overrightarrow{B^*}\times\overrightarrow{C^*}\right) = \begin{vmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* \\ B_1^* & B_2^* & B_3^* \\ C_1^* & C_2^* & C_3^* \end{vmatrix} \triangleq \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -A_3 \\ B_1 & B_2 & -B_3 \\ C_1 & C_2 & -C_3 \end{vmatrix} = -\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

oy_3沿oy_1y_2面进行反射

Ex6、已知$\vec{A}$为绝对矢量，则$\nabla\cdot\vec{A}$为绝对标量。

证明：$\nabla^*\cdot\overrightarrow{A^*} = \dfrac{\partial A_i^*}{\partial y_i^*} = \dfrac{\partial \alpha_{ij}A_j}{\partial y_i^*} = \alpha_{ij}\dfrac{\partial A_j}{\partial y_i^*} = \alpha_{ij}\dfrac{\partial A_j}{\partial y_k}\dfrac{\partial y_k}{\partial y_i^*}$

$$=\alpha_{ij}\alpha_{ik}\frac{\partial A_j}{\partial y_k} = \delta_{jk}\frac{\partial A_j}{\partial y_k} = \frac{\partial A_j}{\partial y_j} = \nabla\cdot\vec{A}$$

- 总结：

已知$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$为绝对矢量，ϕ为绝对标量。则

$\vec{A}\cdot\vec{B},\nabla\cdot\vec{A},\nabla\cdot\nabla\phi$　　为绝对标量；

$\vec{A}\pm\vec{B},\alpha\vec{A},\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}),\nabla\phi$　　为绝对矢量；

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$　　为伪标量；

$\vec{A}\times\vec{B},\nabla\times\vec{A}$ 为伪矢量。

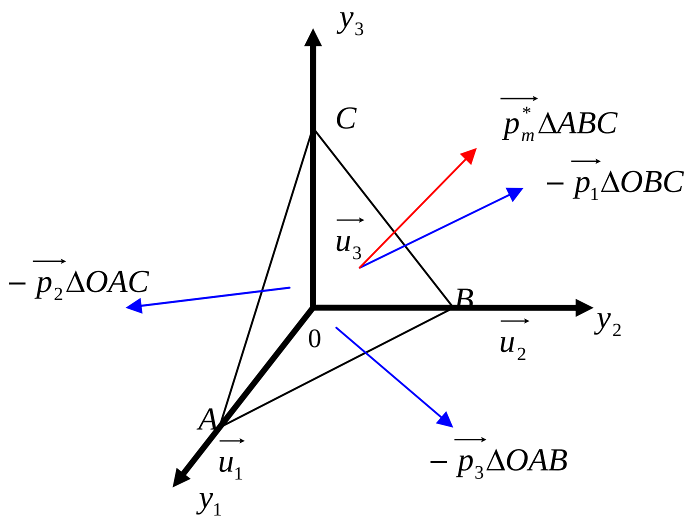
2.3 二阶张量

2.3.1 二阶张量的定义及二阶绝对张量

Ex1、应力张量 P

问题：在流体或弹性体中，某一点 O 处受到的力不仅具有大小和方向，而且与作用面的方向有关。

已知：$\vec{p_i}$ 法向为 $\vec{u_i}$ 指向的流体作用在单位方向为 $\vec{u_i}$ 的微元面上的应力，$\vec{u_m^*}$ 为任意单位矢量（O，$\vec{u_i}$，$\vec{p_i}$，$\vec{u_m^*}$）



求：$\vec{p}_m^*$

解：取微元四面体 $OABC$

$$\sum 体积力+\sum 表面力=\vec{0}$$

体积力为三阶小量，可忽略。

$$\sum 表面力=\vec{0}$$

$$\vec{p}_m^*\Delta ABC-\overrightarrow{p_1}\Delta OBC-\overrightarrow{p_2}\Delta OAC-\overrightarrow{p_3}\Delta OAB=\vec{0}$$

$$\vec{p}_m^*=\overrightarrow{p_1}\frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}+\overrightarrow{p_2}\frac{\Delta OAC}{\Delta ABC}+\overrightarrow{p_3}\frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}$$（三角形面积关系证明从略）

$$=\overrightarrow{p_1}\alpha_{m1}+\overrightarrow{p_2}\alpha_{m2}+\overrightarrow{p_3}\alpha_{m3}=\alpha_{mi}\overrightarrow{p_i}$$

- 做一正交变换 $y_i\to y_m^*,\vec{u}_i\to\vec{u}_m^*$：$\alpha_{mi}=\overrightarrow{u_m^*}\cdot\overrightarrow{u_i}$，将 $\overrightarrow{p_m^*}$ 向新坐标系 $\overrightarrow{u_n^*}$ 方向投影

$$P_{mn}^*=\vec{p}_m^*\cdot\overrightarrow{u_n^*}=\alpha_{mi}\overrightarrow{p_i}\cdot\overrightarrow{u_n^*}=\alpha_{mi}p_{ij}\overrightarrow{u_j}\cdot\overrightarrow{u_n^*}=\alpha_{mi}\alpha_{nj}P_{ij}$$

- 二阶张量的表示方法：

①实体方法：$P=\overrightarrow{u_i}P_{ij}\overrightarrow{u_j}$，　$\vec{A}=A_j\overrightarrow{u_j}$

②分量形式：P_{ij}，　A_j

二阶绝对张量：对于任意坐标变换满足 $\pi^*=\pi$。

定理：二阶张量为绝对张量的充要条件为 $\pi_{mn}^*=\alpha_{mi}\alpha_{nj}\pi_{ij}$。

证明：从略

Ex2、位移张量 D

已知：流体或弹性体中的微元段 $\overrightarrow{PQ}=\delta\overrightarrow{r_p}=\delta y_i\overrightarrow{u_i}$ ，速度场 $\vec{v}=v_i\overrightarrow{u_i}$

求：经过 dt 时刻后的微元段 $\overrightarrow{P'Q'}$ （$\overrightarrow{PQ}$，$\vec{v}$，dt）

解：$\overrightarrow{PQ}=\delta y_i\overrightarrow{u_i}$

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{v_p}dt$$

$$\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{v_Q}dt=\overrightarrow{OQ}+\left(\overrightarrow{v_P}+\delta\overrightarrow{v_P}\right)dt$$

$$\overrightarrow{P'Q'}=\overrightarrow{PQ}+\delta\overrightarrow{v_P}dt$$

$$d\delta y_i\overrightarrow{u_i}=\delta\overrightarrow{v_P}dt=\delta\left(v_i\overrightarrow{u_i}\right)dt=\delta v_i dt\overrightarrow{u_i}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\delta v_j dt\overrightarrow{u_i}$$

$$\boxed{D_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}=\frac{d(\delta y_i)}{\delta y_j dt}}$$

例如：$D_{11}=\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=\frac{d(\delta y_1)}{\delta y_1 dt}$ 表示单位物质长度的伸长率；

$$D_{12}=\frac{\partial v_1}{\partial y_2}=\frac{d(\delta y_1)}{\delta y_2 dt}$$

$$D_{21}=\frac{\partial v_2}{\partial y_1}=\frac{d(\delta y_2)}{\delta y_1 dt}$$

二者均表示单位物质长度的旋转率，但表示的旋转方向相反

Ex3、变形率张量 S

问题：已知 $\delta S=\left|\overrightarrow{PQ}\right|,\overrightarrow{PQ}=\delta y_i\overrightarrow{u_i},\vec{v}$，dt

求：$\frac{d\delta S}{\delta S dt}$ （单位长度的伸长率）

解：$\delta S^2=\delta y_i\delta y_i$

$$\delta S\frac{d\delta S}{dt}=\delta y_i\frac{d\delta y_i}{dt}$$

$$\delta S\frac{d\delta S}{dt}=\delta y_i\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\delta y_j$$

$$\frac{d\delta S}{\delta S dt} = n_i \frac{\partial v_i}{\partial y_j} n_j$$

$$= n_i \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right) n_j + n_i \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right) n_j$$

$$= n_i \cdot S_{ij} \cdot n_j + n_i \cdot \Omega_{ij} \cdot n_j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

$$D_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} - \frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_3} - \frac{\partial v_3}{\partial y_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3} - \frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\delta\vec{r}}{dt} = \delta\vec{r} \cdot S + \delta\vec{r} \cdot \vec{\Omega} = \delta\vec{r} \cdot S + \delta\vec{r} \times \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}$$

2.3.2 二阶张量的分类与运算

⑴二阶张量的分类

二阶单位张量　　$\pi_{ij} = \delta_{ij}$

二阶对称张量　　$\pi_{ij} = \pi_{ji}$

二阶反对称张量　$\pi_{ij} = -\pi_{ji}$

二阶转置张量　　$\pi_{ij}{}^{T} = \pi_{ji}$

⑵二阶绝对张量

$$\pi^* = \pi \Leftrightarrow \pi^*_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\pi_{ij}$$

⑶二阶张量的代数运算

分解：$A = \vec{u}_i A_{ij} \vec{u}_j$

相等：$A = B$ 当且仅当 $a_{ij} = b_{ij}$

$$A = \overrightarrow{u_i} a_{ij} \overrightarrow{u_j}, B = \overrightarrow{u_i} b_{ij} \overrightarrow{u_j}$$

加减：$A \pm B = \overrightarrow{u_i}\left(a_{ij} + b_{ij}\right)\overrightarrow{u_j}$

数乘：$\alpha A = \overrightarrow{u_i}\left(\alpha a_{ij}\right)\overrightarrow{u_j}$

并积：$\pi \vec{A} = \pi_{ij} A_k \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{u_k}$

$$\vec{A}\vec{B} = \overrightarrow{u_i} a_i b_j \overrightarrow{u_j} = a_i b_j \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_j}$$

缩并：$\pi_{ii} = \pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33}$

内积：$\tau \cdot S = \tau_{ij} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_j} \cdot S_{kl} \overrightarrow{u_k}\overrightarrow{u_l} = \tau_{ij} S_{jl} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_l}$

两次内积：并联 $\tau : S = \tau_{ij} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_j} : S_{kl} \overrightarrow{u_k}\overrightarrow{u_l} = \tau_{ij} S_{ij}$

串联 $\tau \cdot\cdot S = \tau_{ij} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_j} \cdot\cdot S_{kl} \overrightarrow{u_k}\overrightarrow{u_l} = \tau_{ij} S_{ji}$

τ 、S 中只要有一个是对称张量，则 $\tau : S = \tau \cdot\cdot S$ 。

⑷二阶张量的微分运算

$$\nabla \vec{v} = \overrightarrow{u_i} \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \overrightarrow{u_j}$$

$$\nabla \cdot P = \overrightarrow{u_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \cdot \overrightarrow{u_j} P_{jk} \overrightarrow{u_k} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial y_i} \overrightarrow{u_k}$$

理想流体：$P_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\left(\nabla P\right)_1 = \frac{\partial P_{1i}}{\partial y_i} = -\frac{\partial p \delta_{1i}}{\partial y_i} = -\frac{\partial p}{\partial y_1}$$

$$\nabla \cdot P = -\nabla p$$

$$\nabla \cdot S = \frac{\partial S_{ij}}{\partial y_i} \overrightarrow{u_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)\overrightarrow{u_j}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_j}{\partial y_i^2}\overrightarrow{u_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i \partial y_j}\overrightarrow{u_j}$$

2.4 各向同性张量

各向同性张量：张量及其分量都不随坐标系变换而变换。

$$\begin{cases} P^* = P \\ P_{ij}^* = P_{ij} \end{cases}$$

2.4.1 零阶各向同性张量

绝对标量 $\phi^* = \phi$

2.4.2 一阶各向同性张量

只有零矢量 $\vec{A} = \vec{0}$ 是一阶各向同性张量。

证明：$A_i^* = \alpha_{ij} A_j$

利用反射变换，则

$A_3^* = \alpha_{3j} A_j = -A_3 = A_3$

则 $A_3 = 0$

同理，可证 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$

则 $\vec{A} = \vec{0}$

2.4.3 二阶各向同性张量

$\pi_{ij} = \lambda \delta_{ij}$

要使二阶同性张量相等，则

$\pi^* = \pi, \pi_{mn}^* = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\pi_{ij} = \pi_{mn}$

绝对张量　　各向同性

$\pi_{11}^* = \alpha_{1i}\alpha_{1j}\pi_{ij} = \alpha_{12}\alpha_{12}\pi_{22} = \pi_{22}$

绝对张量　　绕 y_3 旋转 90°　　各向同性

$\pi_{11} = \pi_{22} = \pi_{33} = \lambda$

$\pi_{13}^* = \alpha_{1i}\alpha_{3j}\pi_{ij} = -\pi_{13} = \pi_{13}$

沿 oy_1y_2 面反射　　各向同性

$\therefore \pi_{13} = 0$

同理，可得 $\pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{21} = \pi_{23} = \pi_{31} = \pi_{32} = 0$

下面证明$\pi_{ij} = \lambda\delta_{ij}$确实是二阶各向同性张量：

$$\pi^*_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\pi_{ij} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\lambda\delta_{ij} = \alpha_{mi}\alpha_{ni}\lambda = \lambda\delta_{mn} = \pi_{mn}$$

如傅立叶导热定律：

$$q_i = q_{0i} + \pi_{ij}\frac{\partial T}{\partial y_i} = \pi_{ij}\frac{\partial T}{\partial y_i} = -\lambda\delta_{ij}\frac{\partial T}{\partial y_i} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y_i}$$

2.4.4 三阶各向同性张量

满足：$\pi^*_{lmn} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nk}\pi_{ijk}$，且$\pi^*_{lmn} = \pi_{lmn}$

(1) $\pi^*_{113} = \alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{3k}\pi_{ijk} = \alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{33}\pi_{113} = -\pi_{113} = \pi_{113}$

沿oy_1y_2面反射　　各向同性

$\therefore \pi_{113} = 0$

同理，其它两个下标相等的分量都为 0

(2) $\pi^*_{333} = -\pi_{333} = \pi_{333}$

沿oy_1y_2面反射　　各向同性

$\therefore \pi_{333} = 0$

同理，可得$\pi_{111} = \pi_{222} = \pi_{333} = 0$

(3)偶排列

$\pi^*_{123} = \alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\pi_{ijk} = \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}\pi_{312} = \pi_{312} = \pi_{123}$

绝对张量　　绕OM 旋转120^o　　各向同性

$\therefore \pi_{123} = \pi_{231} = \pi_{312} = \lambda$

(4)奇排列

$\pi^*_{213} = \pi_{321} = \pi_{213}$

绕OM 旋转120^o　　各向同性

$\therefore \pi_{213} = \pi_{132} = \pi_{321} = \lambda_1$

另外，由于 $\pi_{123}^{*}=-\pi_{213}^{*}$

绕 y_3 旋转 90°

$\therefore \lambda_1=-\lambda$

$\because \pi_{123}^{*}=-\pi_{123}=\pi_{123}=0$

反射变换　　各向同性

$\therefore \pi_{ijk}=0$

因而，要使三阶同性张量是各向同性的，则其应为零。

一种观念：$\therefore \pi_{ijk}=\lambda\varepsilon_{ijk}$

2.4.5 四阶各向同性张量

满足：$\pi_{pqrs}^{*}=\alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\alpha_{sl}\pi_{ijkl}$

(1) $\pi_{1111}=\pi_{2222}=\pi_{3333}$

(2) $i=j\neq k=l$，例如 π_{1122}，则各元素相等，记为 λ

(3) $i=k\neq j=l$，例如 π_{1212}，则各元素相等，记为 μ'

(4) $i=l\neq j=k$，例如 π_{1221}，则各元素相等，记为 γ'

(5)其他情况，均为零

证明：(1) $\pi_{1111}^{*}=\pi_{2222}=\pi_{1111}$，同理 $\pi_{1111}=\pi_{2222}=\pi_{3333}$

绕 OM 旋转 120°　　各向同性

(2) $\pi_{1122}^{*}=\pi_{2233}=\pi_{1122}=\lambda$

绕 OM 旋转 120°　　各向同性

(3) $\pi_{1212}^{*}=\pi_{2323}=\pi_{1212}=\mu'$

绕 OM 旋转 120°　　各向同性

(4) $\pi_{1221}^{*}=\pi_{2332}=\pi_{1221}=\gamma'$

绕 OM 旋转 120°　　各向同性

(5) $\pi^{*}_{1231} = -\pi_{1231} = \pi_{1231}$

反射变换　　各向同性

$\therefore \pi_{1231} = 0$

综上，$\pi_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu'\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma'\delta_{il}\delta_{jk}$

$$\pi^{*}_{pqrs} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\alpha_{sl}\pi_{ijkl}$$

$$= \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\alpha_{sl}\left(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu'\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma'\delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$$= \lambda\delta_{pq}\delta_{rs} + \mu'\delta_{pr}\delta_{qs} + \gamma'\delta_{ps}\delta_{qr}$$

$$= \pi_{pqrs}$$

$\therefore \pi_{ijkl}$ 确实是四阶各向同性张量

- 四阶各向同性对称张量

$$\pi_{ijkl} = \pi_{jikl}$$

$$\pi_{ijkl} = \pi_{ijlk}$$

令 $\mu' = \mu + \gamma, \gamma' = \mu - \gamma$

$$\pi_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu + \gamma)\delta_{ik}\delta_{jl} + (\mu - \gamma)\delta_{il}\delta_{jk}$$

$$= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \gamma\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

由于是对称张量，故 $\pi_{ijkl} = \pi_{jikl}$

$$\pi_{jikl} = \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}\right) - \gamma\left(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}\right)$$

而要使 $\pi_{ijkl} = \pi_{jikl}$，必须要使 $\gamma = 0$

$$\therefore \pi_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}\right)$$

- 例题：写出笛卡尔坐标系下牛顿流体本构方程。

解：粘性应力 τ 与变形率张量 S 成线性关系，且粘性系数为四阶各向同性张量。

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \pi_{ijkl}S_{kl}$$

$$= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}S_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)S_{kl}$$

$$= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}S_{kk} + \mu S_{ij} + \mu S_{ji}$$

$$= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\vec{v} + 2\mu S_{ij}$$

Stokes 流体　　$p_{ii} = -3p$

$$p_{ii} = -3p + 3\lambda\nabla\cdot\vec{v} + 2\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

$$3\lambda\nabla\cdot\vec{v} + 2\mu\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

本构方程　　$p_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\cdot\delta_{ij}\nabla\cdot\vec{v} + 2\mu S_{ij}$

湍流雷诺应力的 Bossnisq 涡粘性假设：$-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu_t\overline{S_{kk}}\delta_{ij} + 2\mu\bar{S}_{ij}$

各向同性本构方程　$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\vec{v} + \mu\left(\nabla\vec{v} + \overrightarrow{\nabla v^T}\right)$

2.5 以笛卡尔张量表示的气动基本方程组

证明：$\boxed{\nabla\cdot\vec{v} = \frac{D\delta v}{\delta v\cdot Dt}}$

证：$\delta v = \delta y_1\delta y_2\delta y_3$

$$\frac{D\delta y_1\delta y_2\delta y_3}{\delta y_1\delta y_2\delta y_3 Dt} = \frac{D\delta y_1}{\delta y_1\cdot Dt} + \frac{D\delta y_2}{\delta y_2\cdot Dt} + \frac{D\delta y_3}{\delta y_3\cdot Dt}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3}$$

$$= \nabla\cdot\vec{v}$$

2.5.1 连续性方程（以后将证明对任意曲线坐标系都成立）

$$\frac{D}{Dt}\int\rho\delta v = 0$$

$$\int\frac{D\rho}{Dt}\delta v + \int\rho\frac{D\delta v}{Dt} = \int\frac{D\rho}{Dt}\delta v + \int\rho\delta v\frac{D\delta v}{\delta v\cdot Dt}$$

$$= \int\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v}\right)\delta v = 0$$

$\therefore$连续性方程为　$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\cdot\nabla\cdot\vec{v} = 0$　　(1)

对不可压流，$\nabla\cdot\vec{v} = 0$

注意：不可压流中密度未必为常数，如水油分层流。

定常流动：$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\vec{v}=\nabla\cdot\rho\vec{v}=0$

2.5.2 动量方程

$$\frac{D}{Dt}\int\rho\vec{v}\cdot\delta v=\int\rho\vec{f}\delta v+\oint\overrightarrow{P_n}\delta S$$

$$左边=\int\frac{D\rho\delta v}{Dt}\vec{v}+\int\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\delta v=\int\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\delta v$$

$$右边=\int\rho\vec{f}\delta v+\oint\vec{n}\cdot P\delta S=\int\rho\vec{f}\delta v+\int\nabla\cdot P\delta v$$

$$\therefore 动量方程为\quad \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho\vec{f}+\nabla\cdot P \qquad (2)$$

$$对牛顿流体\quad \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\nabla\left(\lambda\nabla\cdot\vec{v}\right)+\nabla\cdot 2\mu S$$

2.5.3 能量方程（热力学第一定律）

$$\frac{D}{Dt}\int\rho\left(u+\frac{1}{2}\overrightarrow{v^2}\right)\delta v=\int\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\delta v+\oint\overrightarrow{p_n}\cdot\vec{v}\delta S-\oint q_n\delta S+\int\dot{q}\delta v$$

$$左边=\int\rho\frac{D\left(u+\frac{\overrightarrow{v^2}}{2}\right)}{Dt}\delta v$$

$$右边=\int\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\delta v+\int\nabla\cdot\left(P\cdot\vec{v}\right)\delta v+\int\nabla\cdot k\nabla T\delta v+\int\dot{q}\,\delta v$$

$$\rho\frac{D\left(u+\frac{\overrightarrow{v^2}}{2}\right)}{Dt}=\rho\vec{f}\cdot\vec{v}+\nabla\cdot\left(P\cdot\vec{v}\right)+\nabla\cdot k\nabla T+\dot{q} \qquad (3)$$

$(2)\cdot\vec{v}$：$\rho\frac{D\frac{1}{2}\overrightarrow{v^2}}{Dt}=\rho\cdot\vec{f}\cdot\vec{v}+\left(\nabla\cdot P\right)\cdot\vec{v}$ （$\nabla\cdot(P\cdot\vec{v})=(\nabla\cdot P)\cdot\vec{v}+P:S$）

$(3)-(2)\cdot\vec{v}$：

$$\rho\frac{Du}{Dt}=P:S+\nabla\cdot k\Delta T+\dot{q}$$

$$=\left(-p\delta_{ij}+\lambda\nabla\cdot\vec{v}\delta_{ij}+2\mu S_{ij}\right)S_{ij}+\nabla\cdot k\Delta T+\dot{q}$$

$$=p\nabla\cdot\vec{v}+\lambda\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)^2+2\mu S^2+\nabla\cdot k\nabla T+\dot{q}$$

2.5.4 热力学第二定律

$$\Delta Q=\Delta U+p\Delta V$$

$$T\frac{DS}{Dt}=\frac{Du}{Dt}+P\cdot\frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt}$$

$$=-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{v}+\frac{\phi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot k\nabla T+\frac{\dot{q}}{\rho}+p\frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt}$$

$$T\frac{DS}{Dt}=\frac{\phi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot k\nabla T+\frac{\dot{q}}{\rho}$$ 等熵条件：无粘、绝热

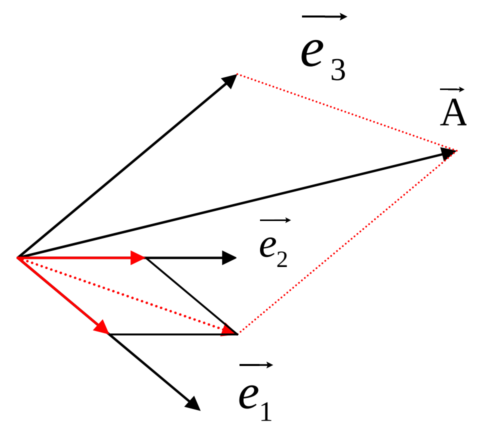
第三章 任意曲线坐标系下的张量分析

3.1 基本矢量，倒易基本矢量，协变分量，逆变分量

1 定义

例：已知任一不共面、非 0 的一组矢量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$

求任一矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 上的分解式。



解：$\vec{A}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3$ 两边同时点乘 $(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)$ 可以得到

$$\vec{A}\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\alpha\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)$$

$\alpha=\vec{A}\bullet\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}=\vec{A}\cdot\vec{e}^1$，其中 $\vec{e}^1=\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

同理可以得到 $\beta=\vec{A}\cdot\vec{e}^2$， 其中 $\vec{e}^2=\frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

$\gamma=\vec{A}\cdot\vec{e}^3$， 其中 $\vec{e}^3=\frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 为基本矢量，$\vec{e}^1$，$\vec{e}^2$，$\vec{e}^3$ 为倒易基本矢量。

$\vec{A}$ 的协变分量 $A_i=\vec{A}\cdot\vec{e}_i$ ，$\vec{A}$ 的逆变分量 $A^i=\vec{A}\cdot\vec{e}^i$，$\vec{A}=A^i\vec{e}_i=A_i\vec{e}^i$

2 倒易基本矢量的性质

(1) $\vec{e}^i\cdot\vec{e}_j=\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

(2) 设基本矢量围成的体积为 V，倒易基本矢量围成的体积为 V'，则 $VV'=1$

$$V^{'}=\vec{e}^{1}\cdot(\vec{e}^{2}\times\vec{e}^{3})=\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}\cdot(\frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}\times\frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)})$$

$$=\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{V^3}\cdot\{[(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_2]\vec{e}_1-[(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_1]\vec{e}_2\}$$

$$=\frac{1}{V^3}[(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_2][(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_1]=\frac{1}{V}$$

可以得到$VV^{'}=1$

(3) $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$与$\vec{e}^{1}$，$\vec{e}^{2}$，$\vec{e}^{3}$互为倒易。

$$\frac{\vec{e}^{2}\times\vec{e}^{3}}{\vec{e}^{1}\cdot(\vec{e}^{2}\times\vec{e}^{3})}=\frac{1}{V^{'}}(\frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}\times\frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)})=\frac{1}{V}\{[(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_2]\vec{e}_1-[(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_1]\vec{e}_2\}=\vec{e}_1$$

(4) 笛卡尔坐标基本矢量$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$，$\overrightarrow{u_3}$的倒易基本矢量为本身。

$$\vec{u}^{1}=\frac{\vec{u}_2\times\vec{u}_2}{\vec{u}_1\cdot(\vec{u}_2\times\vec{u}_2)}=\vec{u}_1$$ 倒易基本矢量仍然是本身。

(5) 协变物理分量、逆变物理分量

$\vec{A}=A_i\vec{e}^{i}=a_i\overrightarrow{l^{i}},\overrightarrow{l^{i}}=\frac{\vec{e}^{i}}{\left|\vec{e}^{i}\right|}$为单位逆变基本矢量，$a_i=A_i\left|\vec{e}^{i}\right|$（$i$非求和指标）为协变物理分量

$\vec{A}=A^{i}\vec{e}_i=a^{i}\vec{l}_i,\vec{l}_i=\frac{\vec{e}_i}{\left|\vec{e}_i\right|}$为单位基本矢量，$a^{i}=A^{i}\left|\vec{e}_i\right|$（$i$非求和指标）为逆变物理分量

3.2 曲线坐标系的概念

1 曲线坐标系的要素

（1）笛卡尔坐标系$(x,y,z)=(y^1,y^2,y^3)$

过任意空间点 P：$(y^1,y^2,y^3)=(c^1,c^2,c^3)$做三个等值面　$y^1=c^1$，$y^2=c^2$，$y^3=c^3$

坐标面：　$y^i=c^i$　（均为平面）

坐标线(两两坐标面之间的交线，其上只有一个坐标在改变)：直线

坐标基本矢量　$\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}_p}{\partial y^i}=\frac{\partial(y^j\vec{u}_j)}{\partial y^i}=\overrightarrow{u_i}$

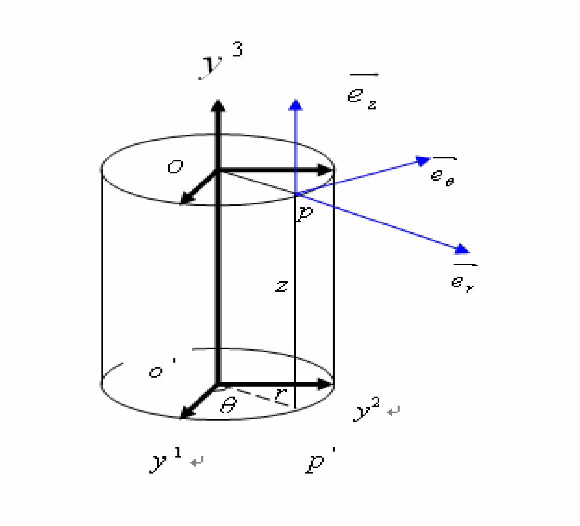
（2）圆柱坐标系$(x^1,x^2,x^3)=(r,\varphi,z)$

过任意空间点 P：$(x^1,x^2,x^3)=(c^1,c^2,c^3)$做三个等值面　$r=c^1$，$\varphi=c^2$，$z=c^3$

坐标面：　$x^i=c^i$（$r=c^1$为圆柱面，$\varphi=c^2$为半平面，$z=c^3$为平面）

坐标线：r 坐标线为射线，φ 坐标线为圆周，z 坐标线为直线。

坐标基本矢量 $\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial x^i} = \dfrac{\partial (y^j \vec{u}_j)}{\partial x^i} = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} \vec{u}_j$



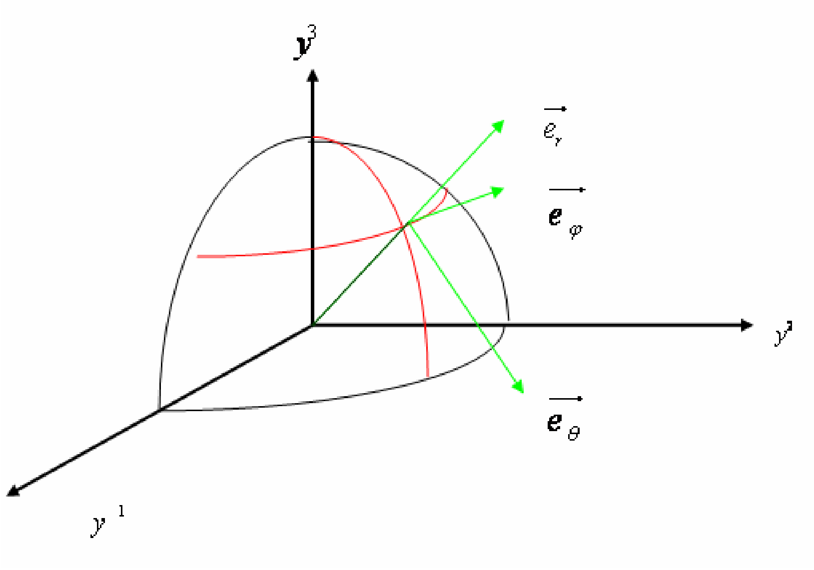
（3）球坐标系 $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, \varphi)$

过任意空间点 P：$(x^1, x^2, x^3) = (c^1, c^2, c^3)$ 做三个等值面 $R = c^1$，$\theta = c^2$，$\varphi = c^3$

坐标面： $x^i = c^i$（$R = c^1$ 为球面，$\theta = c^2$ 为锥面，$\varphi = c^3$ 为半平面）

坐标线：r 坐标线为射线，φ 坐标线为圆周，z 坐标线为直线。

坐标基本矢量：$\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial x^i} = \dfrac{\partial (y^j \vec{u}_j)}{\partial x^i} = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} \vec{u}_j$



（4）任意曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3)

设存在一坐标变换 $(y^1,y^2,y^3)\to(x^1,x^2,x^3)$ $\quad x^i=x^i(y^1,y^2,y^3)$ 满足：

（a）连续可导（坐标线一阶光滑）

（b）$J=\dfrac{\partial(y^1y^2y^3)}{\partial(x^1x^2x^3)}\neq 0$（反函数存在，即笛卡尔坐标与任意曲线坐标一一对应）

则称 x^i 为任意曲线坐标

2. 坐标基本矢量、坐标倒易基本矢量

定义：坐标基本矢量 $\vec{e}_i=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^i}=\dfrac{\partial(y^j\vec{u}_j)}{\partial x^i}=\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\vec{u}_j$，倒易基本矢量 $\vec{e}^i=\nabla x^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\vec{u}_j$，显然 $\vec{e}^i\cdot\vec{e}_j=\delta^i_j$

例：求圆柱坐标系的坐标基本矢量 $\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$ 及倒易基本矢量 $\vec{e}^r,\vec{e}^\varphi,\vec{e}^z$

解：

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

由于 $\vec{e}_i=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^i}=\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\vec{u}_j$ 所以可以推出

$$\vec{e}_r=\frac{\partial\vec{r}_p}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\vec{u}_1+\frac{\partial y}{\partial r}\vec{u}_2+\frac{\partial z}{\partial r}\vec{u}_3=\cos\varphi\vec{u}_1+\sin\varphi\vec{u}_2$$

$$\vec{e}_\varphi=\frac{\partial\vec{r}_p}{\partial\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{u}_1+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{u}_2+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{u}_3=-r\sin\varphi\vec{u}_1+r\cos\varphi\vec{u}_2$$

$$\vec{e}_z=\vec{u}_3$$

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=tg^{-1}(\dfrac{y}{x})\\ z=z\end{cases}$$

由于 $\vec{e}^i=\nabla x^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\vec{u}_j$ 所以可以推出

$$\vec{e}^r=\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{u}_1+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{u}_2+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{u}_3=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{u}_1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{u}_2=\cos\varphi\vec{u}_1+\sin\varphi\vec{u}_2$$

$$\vec{e}^{\varphi}=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{u}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{u}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_3=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}\vec{u}_1+\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}\vec{u}_2=-\frac{1}{r}\sin\varphi\vec{u}_1+\frac{1}{r}\cos\varphi\vec{u}_2$$

$$\vec{e}_z=\vec{u}_3$$

例：求球坐标系的坐标基本矢量 $\vec{e}_R,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$ 及倒易基本矢量 $\vec{e}^R,\vec{e}^\theta,\vec{e}^\varphi$

$$\begin{cases}x=R\sin\theta\cos\varphi\\ y=R\sin\theta\sin\varphi\\ z=R\cos\theta\end{cases}$$

由于 $\vec{e}_i=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^i}=\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\vec{u}_j$ 所以可以推出

$$\vec{e}_R=\frac{\partial y^j}{\partial R}\vec{u}_j=\frac{\partial x}{\partial R}\vec{u}_1+\frac{\partial y}{\partial R}\vec{u}_2+\frac{\partial z}{\partial R}\vec{u}_3=\sin\theta\cos\varphi\vec{u}_1+\sin\theta\sin\varphi\vec{u}_2+\cos\theta\vec{u}_3$$

$$\vec{e}_\theta=\frac{\partial y^j}{\partial\theta}\vec{u}_j=\frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{u}_1+\frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{u}_2+\frac{\partial z}{\partial\theta}\vec{u}_3=R\cos\theta\cos\varphi\vec{u}_1+R\cos\theta\sin\varphi\vec{u}_2-R\sin\theta\vec{u}_3$$

$$\vec{e}_\varphi=\frac{\partial y^j}{\partial\varphi}\vec{u}_j=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{u}_1+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{u}_2+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{u}_3=-R\sin\theta\sin\varphi\vec{u}_1+R\sin\theta\cos\varphi\vec{u}_2$$

$$\begin{cases}R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta=tg^{-1}(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}})\\ \varphi=tg^{-1}(\dfrac{y}{x})\end{cases}$$

由于 $\vec{e}^i=\nabla x^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\vec{u}_j$ 所以可以推出

$$\vec{e}^R=\nabla R=\frac{\partial R}{\partial x}\vec{u}_1+\frac{\partial R}{\partial y}\vec{u}_2+\frac{\partial R}{\partial z}\vec{u}_3=\sin\theta\cos\varphi\vec{u}_1+\sin\theta\sin\varphi\vec{u}_2+\cos\theta\vec{u}_3=\vec{e}_R$$

$$\vec{e}^\theta=\nabla\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}\vec{u}_1+\frac{\partial\theta}{\partial y}\vec{u}_2+\frac{\partial\theta}{\partial z}\vec{u}_3=\frac{1}{R^2}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}^\varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{u}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{u}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_3=\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\vec{e}_\varphi$$

3. 度量张量 g_{ij}、倒易度量张量 g^{ij}：度量微元线段长度、角度，微元面积，微元体积的张量

过 P 点做曲线坐标系 $P(x^1,x^2,x^3)$，求微元线段 $\overrightarrow{PQ}=d\vec{r}_p=dx^i\vec{e}_i$ 的长度

解：对一般的坐标系$(dr_p)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$不再成立

$$(ds)^2 = d\vec{r}_p \bullet d\vec{r}_p = dx^i\vec{e}_i \cdot dx^j\vec{e}_j = g_{ij}dx^i dx^j$$

$$= (dx^1\ dx^2\ dx^3)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

g_{ij}的性质：

（1）计算公式：$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \dfrac{\partial y^m}{\partial x^i}\vec{u}_m \cdot \dfrac{\partial y^n}{\partial x^i}\vec{u}_n = \dfrac{\partial y^m}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^m}{\partial x^j}$

（2）对称性 $g_{ij} = g_{ji}$

（3）对于正交曲线坐标系：

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ii} & \text{当} i = j \\ 0 & \text{当} i \neq j \end{cases}$$

$g_{ii} = \dfrac{\partial y^m}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^m}{\partial x^i} = h_i^{\ 2}$（$i$非求和指标），$h_i$是曲线坐标系的拉梅系数，如：

$$h_1^{\ 2} = (\frac{\partial y^1}{\partial x^1})^2 + (\frac{\partial y^2}{\partial x^1})^2 + (\frac{\partial y^3}{\partial x^1})^2$$

对于笛卡尔坐标系： $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对于圆柱坐标系： $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对于球坐标系： $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

对于一般正交坐标系：$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^{\ 2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{\ 2} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{\ 2} \end{pmatrix}$

（4）$g \sim V$关系

$$g=\left|g_{ij}\right|=\begin{vmatrix}\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1 & \vec{e}_1\bullet\vec{e}_2 & \vec{e}_1\bullet\vec{e}_3\\ \vec{e}_2\bullet\vec{e}_1 & \vec{e}_2\bullet\vec{e}_2 & \vec{e}_2\bullet\vec{e}_3\\ \vec{e}_3\bullet\vec{e}_1 & \vec{e}_3\bullet\vec{e}_2 & \vec{e}_3\bullet\vec{e}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e_{11} & e_{21} & e_{31}\\ e_{12} & e_{22} & e_{32}\\ e_{13} & e_{23} & e_{33}\end{vmatrix}=[\vec{e}_1\bullet(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)]^2=V^2$$

$$V=\sqrt{g}$$

（5）A_i～A^i，$\vec{e}_i\sim\vec{e}^i$ 的关系

$$A_i=\vec{A}\cdot\vec{e_i}=A^j\vec{e_j}\cdot\vec{e_i}=g_{ij}A^j$$

$$A^i=\vec{A}\cdot\vec{e^i}=A_j\vec{e^j}\cdot\vec{e_i}=g^{ij}A_j$$

$$\vec{e_i}=g_{ij}\vec{e^j}$$

$$\vec{e^i}=\vec{e^j}g^{ij}$$

（6）$g_{ij}\sim g^{ij}$ 为逆阵

$$\delta_i^j=\vec{e}_i\cdot\vec{e}^j=g_{ik}\vec{e}^k\cdot g^{jl}\vec{e}_l=g_{ik}g^{kj}$$

（7）微元面积与微元体积

$$d\vec{S}_{12}=dx^1\vec{e}_1\times dx^2\vec{e}_2=\sqrt{g}dx^1dx^2\vec{e}^3$$

$$dm_{12}=\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}_{12}=\rho V^3\sqrt{g}dx^1dx^2$$

$$dV=dx^1\vec{e}_1\bullet(dx^2\vec{e}_2\times dx^3\vec{e}_3)=\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3$$

$$F_e=\rho V_e^1\sqrt{g}dx^2dx^3$$

$$F_w=\rho V_w^1\sqrt{g}dx^2dx^3$$

3.3 任意曲线坐标系下的矢量分析

1 代数运算

（1）相等：$\vec{A}=\vec{B}\Leftrightarrow A_i=B_i$ （或者 $A^i=B^i$ ）

（2）$\vec{A}\pm\vec{B}=(A_i\pm B_i)\vec{e}^i=(A^i\pm B^i)\vec{e}_i$

（3）$\alpha\vec{A}=(\alpha A_i)\vec{e}^i=(\alpha A^i)\vec{e}_i$

（4）$\vec{A}\bullet\vec{B}=(A^i\vec{e}_i)\bullet(B_j\vec{e}^j)=\delta_i^jA^iB_j=A^iB_i$

$$=(A_i\vec{e}^i)\bullet(B_j\vec{e}^j)=g^{ij}A_iB_j$$

$$=(A^i\vec{e}_i)\bullet(B^j\vec{e}_j)=g_{ij}A^iB^j$$

（5）

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A^i\vec{e}_i)\times(B^j\vec{e}_j)=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}A^iB^j\vec{e}^k=\sqrt{g}\begin{vmatrix}A^1 & A^2 & A^3\\ B^1 & B^2 & B^3\\ \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3\end{vmatrix}$$

(6)

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=(A^i\vec{e}_i)\bullet(B^j\vec{e}_j\times C^k\vec{e}_k)=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}A^iB^jC^k=\sqrt{g}\begin{vmatrix}A^1 & A^2 & A^3\\ B^1 & B^2 & B^3\\ C^1 & C^2 & C^3\end{vmatrix}$$

（7）$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\bullet\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$

（8）$\vec{A}\vec{B}=A^iB^j\vec{e}_i\vec{e}_j=A^iB^j\vec{e}_i\vec{e}_j=A^iB_j\vec{e}_i\vec{e}^j=A_iB^j\vec{e}^i\vec{e}_j$

2 绝对矢量

（1） 坐标变换

$$x^i=x^i(y^1\quad y^2\quad y^3)\qquad x^{*i}=x^{*i}(y^1\quad y^2\quad y^3)$$

$$x^i=x^i(x^{*1}\quad x^{*2}\quad x^{*3})\qquad x^{*i}=x^{*i}(x^1\quad x^2\quad x^3)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^{*j}}=\frac{\partial(x^1\quad x^2\quad x^3)}{\partial(y^1\quad y^2\quad y^3)}\frac{\partial(y^1\quad y^2\quad y^3)}{\partial(x^{*1}\quad x^{*2}\quad x^{*3})}$$

协变变换 $\vec{e}_i^*=\dfrac{\partial\vec{r}_p^*}{\partial x^{*i}}=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^{*i}}=\dfrac{\partial\vec{r}_p}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}=\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\vec{e}_j$

逆变换 $\vec{e}^{*i}=\nabla x^{*i}=\dfrac{\partial x^{*i}}{\partial y^k}\vec{u}_k=\dfrac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial y^k}\overrightarrow{u_k}=\dfrac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}\vec{e}^j$

（2） 绝对矢量的充要条件

$\vec{A}^*=\vec{A}\Leftrightarrow A_i^*=\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}A_j$：协变分量满足协变变换

$\vec{A}^*=\vec{A}\Leftrightarrow A^{*i}=\dfrac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}A^j$：逆变分量满足逆变变换

3 矢量的微分运算及克里斯托夫符号.

（1） 矢量的偏微分

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}=\frac{\partial A_i \vec{e}^{\,i}}{\partial x^k}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\vec{e}^{\,i}+A_i\frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}=\frac{\partial A^i \vec{e}_i}{\partial x^k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\vec{e}_i+A^i\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$$

$$d\vec{A}=\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}dx^k$$

（2） 克里斯托夫符号：度量曲线坐标系的弯曲程度的张量

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\vec{e}_i+A^i\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ 两边同时点乘 $\vec{e}^{\,j}$ 可以得到

$$\nabla_k A^j=\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}\cdot\vec{e}^{\,j}=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}\cdot e^j=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\Gamma^j_{ik}$$

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\vec{e}^{\,i}+A_i\frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial x^k}$ 两边同时点乘 $\vec{e}_j$ 可以得到

$$\nabla_k A_j=\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_i\frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}-A_i\Gamma^i_{jk}$$

第一类克里斯托夫符号 $\Gamma_{j,ik}=\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_j$，为 $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ 的协变分量

第二类克里斯托夫符号 $\Gamma^j_{ik}=\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{e}^{\,j}$，为 $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ 的逆变分量

Γ^j_{ik} 的性质：

（a） $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}=\Gamma^j_{ik}\vec{e}_j$

（b） $\Gamma^j_{ik}=\Gamma^j_{ki}$

（c） 对于笛卡尔坐标系：$\Gamma^j_{ik}=0$

对于圆柱坐标系，只有三个分量非 0：

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}=\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}\cdot\vec{e}^{\,\varphi}=\frac{1}{r}\vec{e}_{\varphi}\cdot\vec{e}^{\,\varphi}=\frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}=\frac{\partial \vec{e}_{\varphi}}{\partial \varphi}\cdot\vec{e}^{\,r}=-r\vec{e}_r\cdot\vec{e}^{\,r}=-r$$

（d）Γ^j_{ik} 不是绝对张量.

（3）$\Gamma-g$ 恒等式

定理：$\frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{g}=\sqrt{g}\Gamma^p_{kp}$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{g}=\frac{\partial}{\partial x^k}[\vec{e}_1\bullet(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)]=\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial x^k}\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)+\vec{e}_1\cdot(\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial x^k}\times\vec{e}_3)+\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\frac{\partial\vec{e}_3}{\partial x^k})$$

$$=\Gamma^j_{1k}\vec{e}_j\bullet(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)+\vec{e}_1\cdot(\Gamma^j_{2k}\vec{e}_j\times\vec{e}_3)+\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\Gamma^j_{3k}\vec{e}_j)$$

$$=(\Gamma^1_{1k}+\Gamma^2_{2k}+\Gamma^3_{3k})[\vec{e}_1\bullet(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)]$$

$$=(\Gamma^1_{1k}+\Gamma^2_{2k}+\Gamma^3_{3k})\sqrt{g}=\Gamma^p_{kp}\sqrt{g}$$

4. 标量的梯度、矢量的散度与旋度

（1） 标量的梯度

$$\nabla\phi=\vec{u}_j\frac{\partial\phi}{\partial y^j}=\vec{u}_j\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}=\vec{e}^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$$

定义梯度算子：$\nabla=\vec{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，具有矢量及微分性质。

对于正交坐标系：

$$\nabla\phi=\vec{e}^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\vec{l}_1\frac{\partial\phi}{h_1\partial x^1}+\vec{l}_2\frac{\partial\phi}{h_2\partial x^2}+\vec{l}_3\frac{\partial\phi}{h_3\partial x^3}$$

对于圆柱坐标系：

$$\nabla\phi=\vec{e}^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\vec{e}^r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\vec{e}^\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+\vec{e}^z\frac{\partial\phi}{\partial z}=\vec{l}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\vec{l}_\varphi\frac{\partial\phi}{r\partial\varphi}+\vec{l}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

（2） 矢量的散度

$$\nabla\bullet\vec{A}=\vec{e}^i\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i}=\vec{e}^i\cdot\nabla_i A^k\vec{e}_k=\nabla_i A^i=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^i\Gamma^k_{ik}$$

$$=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^i\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}(\frac{\partial A^i\sqrt{g}}{\partial x^i})$$

对于正交坐标系：

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial x^1}(h_1h_2h_3A^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(h_1h_2h_3A^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(h_1h_2h_3A^3)]$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial x^1}(h_2h_3a^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(h_3h_1a^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(h_1h_2a^3)]$$

对于圆柱坐标系：

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{r}[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(ra_z)}{\partial z}]$$

（3）矢量的旋度

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}^i\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i}=\vec{e}^i\times(\nabla_i A_j)\vec{e}^j=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}\nabla_i A_j\vec{e}_k=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

对于正交坐标系：

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3\\ \dfrac{\partial}{h_1\partial x^1} & \dfrac{\partial}{h_2\partial x^2} & \dfrac{\partial}{h_3\partial x^3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

对于圆柱坐标系：

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{l}_r & \vec{l}_\varphi & \vec{l}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_r & a_\varphi & a_z\end{vmatrix}$$

练习：证明在任意曲线坐标系下，下面关系式成立：

（1）$\nabla\times\nabla\phi=\vec{0}$

（2）$\vec{V}\times\nabla\times\vec{V}=-\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}+\frac{1}{2}\nabla\vec{V}^2$

练习：写出任意曲线坐标系下的 Laplacian 算子的分量形式。

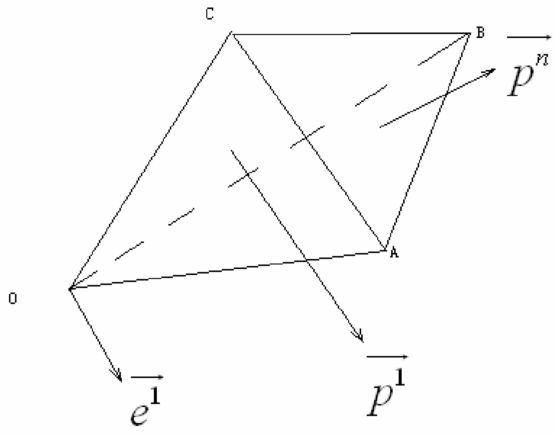
3.4 任意曲线坐标系下的高阶张量分析

1. 二阶张量

在流体或固体中任意一点 O，新老曲线坐标为 x^{*i},x^i，已知作用在各微元面上的应力为 $\vec{P}^i$，求作用在法向为 $\vec{e}^{*m}$ 微元面的应力。

解：

取微元体 OABC，忽略高阶小量，静力平衡方程为：



$$\vec{P}^{*m}\Delta ABC-\vec{P}^1\Delta OBC-\vec{P}^2\Delta OCA-\vec{P}^3\Delta OAB=\vec{0}$$

$$\vec{P}^{*m}=\vec{P}^1\frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}+\vec{P}^2\frac{\Delta OAC}{\Delta ABC}+\vec{P}^3\frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}=m_i\vec{P}^i=\frac{\partial x^{*m}}{\partial x^i}\vec{P}^i$$

$$\vec{P}^{*m}=\frac{\partial x^{*m}}{\partial x^i}\vec{P}^i=\frac{\partial x^{*m}}{\partial x^i}P^{ij}\vec{e}_j$$

$$P^{*mn}=\frac{\partial x^{*m}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*n}}{\partial x^j}P^{ij}$$

P^{ij}：作用面为$\vec{e}^i$，在$\vec{e}^j$方向投影的应力分量（逆变分量）;

P_{ij}：作用面为$\vec{e}_i$，在$\vec{e}_j$方向投影的应力分量（协变分量）;

$P_{i.}^{\cdot j}$：作用面为$\vec{e}_i$，在$\vec{e}^j$方向投影的应力分量（混合分量）;

$p_{\cdot j}^{i\cdot}$：作用面为$\vec{e}^i$，在$\vec{e}_j$方向投影的应力分量（混合分量）。

定理：P为二阶绝对张量的充要条件为$P^{*mn}=\frac{\partial x^{*m}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*n}}{\partial x^j}P^{ij}$。

例：g_{ij}为二阶绝对张量。

证明：$x^i\to x^{*i}$

新坐标系中：$g_{mn}^*=\vec{e}_m^*\bullet\vec{e}_n^*=\frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}}\vec{e}_i\bullet\frac{\partial x^j}{\partial x^{*n}}\vec{e}_j=\frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{*n}}g_{ij}$

可知 g_{ij} 为二阶绝对张量。

例．已知 $\vec{A}$ 为绝对矢量，证明 $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ 不是绝对张量，但 $\nabla_i A^j$ 为二阶绝对张量。

证：$x^i \to x^{*i}$ (x^1, x^2, x^3)

$$\frac{\partial A_m^*}{\partial x^{*n}} = \frac{\partial}{\partial x^{*n}}(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}} A_i) = \frac{\partial A_i}{\partial x^{*n}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}} + A_i \frac{\partial}{\partial x^{*n}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}}$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{*n}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}} + A_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{*m} \partial x^{*n}}$$

可得 $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ 不是绝对张量。

$$\nabla_m^* A_n^* = \vec{e}_n^* \bullet \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial x^{*m}} = \vec{e}_n^* \bullet \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^{*m}}$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^{*n}} \vec{e}^j \bullet \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{*m}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{*n}} \nabla_i A_j$$

可得 $\nabla_i A_j$ 是绝对张量。

2 高阶绝对张量及商法则

$T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \cdots j_s}$ s+m 阶张量，如果 $T^* = T$，则 T 为 m 阶协变，s 阶逆变的绝对张量

定理：T 为绝对张量的充要条件为：

$$T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \cdots j_s} = T_{i_1' \dots i_m'}^{j_1' \cdots j_s'} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{i_m'}} \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_s'}}{\partial x^{j_s}} T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \cdots j_s}$$

商法则：（参见黄克智书）

3 高阶各向同性张量

二阶各向同性张量为：

$$\pi_{mn} = \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \pi_{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \lambda \delta_{ij} = \lambda \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial y^i}{\partial x^n} = \lambda \vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = \lambda g_{ij}$$

四阶各向同性张量为：

$$E^{pqrs}=\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}\frac{\partial x^r}{\partial y^k}\frac{\partial x^s}{\partial y^l}[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})]$$

$$=\lambda g^{pq}g^{rs}+\mu(g^{pr}g^{qs}+g^{ps}g^{qr})$$

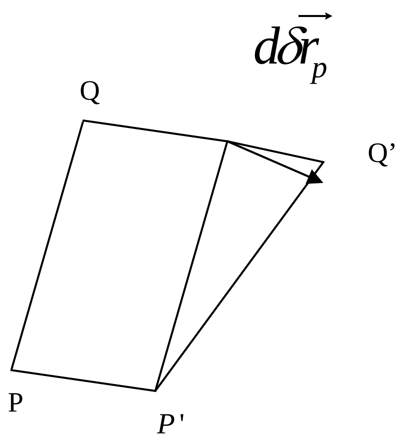
4. 高阶张量的运算

$$\nabla\bullet\Pi=\overrightarrow{e^k}\bullet\frac{\partial}{\partial x^k}(\overrightarrow{e_i}\Pi^{ij}\overrightarrow{e_j})=\overrightarrow{e^k}\bullet\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^k}\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{e^k}\bullet\frac{\partial\overrightarrow{e_i}}{\partial x^k}\Pi^{ij}\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{e^k}\bullet\overrightarrow{e_j}\Pi^{ij}\frac{\partial\overrightarrow{e_j}}{\partial x^k}$$

$$=[\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ik}\Pi^{ij}+\Pi^{ik}\Gamma^j_{ik}]\overrightarrow{e_j}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\Pi^{ij}}{\partial x^i}\overrightarrow{e_j}+\Pi^{ik}\Gamma^j_{ik}\overrightarrow{e_j}$$

5 位移张量和变形率张量

$$D=\nabla\vec{v}$$



$$d\delta\vec{r}_P=[\vec{V}(t,\vec{r}_P+\delta\vec{r}_P)-\vec{V}(t,\vec{r}_P+\delta\vec{r}_P)]dt=\delta\vec{r}_P\bullet\nabla\vec{V}dt$$

$$=\delta\vec{r}_P\bullet\frac{1}{2}(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^T)dt+\delta\vec{r}_P\bullet\frac{1}{2}(\nabla\vec{V}-\nabla\vec{V}^T)dt$$

$$=\delta\vec{r}_P\bullet Sdt+\delta\vec{r}_P\bullet\Omega dt=\delta\vec{r}_P\bullet Sdt+\frac{1}{2}\vec{\omega}\times\delta\vec{r}_P dt$$

位移张量：$D=\nabla\vec{V}=\vec{e}^i\nabla_i V_j\vec{e}^j=\vec{e}^i\nabla_i V^j\vec{e}_j=\vec{e}_i\nabla^i V_j\vec{e}^j=\vec{e}_i\nabla^i V^j\vec{e}_j$

变形率张量：$S=\frac{1}{2}(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^T)$

$$\delta S^2=\delta\vec{r}_P\bullet\delta\vec{r}_P$$

$$\delta s\frac{d\delta s}{dt}=\delta\vec{r}_P\bullet\frac{d\delta\vec{r}_P}{dt}=\delta\vec{r}_P\bullet\nabla\vec{V}\bullet\delta\vec{r}_P$$

$$=\delta x^i\vec{e}_i\bullet\nabla\vec{V}\bullet\delta x^j\vec{e}_j=\delta x^i\nabla_i V_j\delta x^j$$

$$=\delta x^i\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)\delta x^j+\delta x^i\frac{1}{2}(\nabla_i V_j-\nabla_j V_i)\delta x^j$$

$$=\delta x^i\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)\delta x^j$$

$$\frac{d\delta s}{\delta s dt}==\frac{dx^i}{\delta s}\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)\frac{dx^j}{\delta s}=\frac{dx^i}{\delta s}S_{ij}\frac{dx^j}{\delta s}$$

可见单位长度流体质点伸长率仅与变形率张量有关，与旋转张量无关。

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)=\frac{1}{2}(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}+\frac{\partial V_i}{\partial x^j})-V_k\Gamma^k_{ij}$$

第四章 曲面上的张量分析

1．曲面上的高斯坐标（p,q）

2．黎曼－克里斯托夫符号（判断曲面是否可展）

3．曲面上的梯度，散度，旋度。

第五章 张量分析在流体力学中的应用

5.1 流体力学中各种物理量的张量表示

1 $\rho, T, p, h, S, C_p, C_v$ 都是 0 阶绝对张量

$$\phi = \phi(t, x^i)$$

2 流动速度 $\vec{V}$ 是一阶绝对张量

$$\vec{V} = \frac{D\vec{r_p}}{Dt} \quad \vec{r_p} = \vec{r_p}(x^1_{(t)}, x^2_{(t)}, x^3_{(t)})$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r_p}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r_p}}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt} = \vec{e_i}\frac{Dx^i}{Dt}$$

$$V^i = \vec{V} \bullet \vec{e^i} = \frac{Dx^i}{Dt}$$

对于圆柱坐标系：
$$\begin{cases} V^r = \dfrac{Dr}{Dt} \\ V^\varphi = \dfrac{D\varphi}{Dt}(\text{角速度量纲}) \\ V^z = \dfrac{Dz}{Dt} \end{cases}$$

其物理分量：
$$\begin{cases} v^r = \dfrac{Dr}{Dt} \\ v^\varphi = \dfrac{rD\varphi}{Dt}(\text{速度量纲}) \\ v^z = \dfrac{Dz}{Dt} \end{cases}$$

3 流动加速度 $\vec{A}$ 是一阶绝对张量

$$\vec{A}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\bullet\nabla\vec{V}=\frac{\partial V^{i}\vec{e_{i}}}{\partial t}+\vec{V}\bullet\vec{e^{i}}\nabla_{i}V^{j}\vec{e_{j}}$$

$$=\frac{\partial V^{i}}{\partial t}\vec{e_{i}}+V^{j}\nabla_{j}V^{i}\vec{e_{i}}=[\frac{\partial V^{i}}{\partial t}+V^{j}\frac{\partial V^{i}}{\partial x^{j}}+V^{j}V^{k}\Gamma^{i}_{jk}]\vec{e_{i}}$$

$$=[\frac{DV^{i}}{Dt}+V^{j}V^{k}\Gamma^{i}_{jk}]\vec{e_{i}}$$

圆柱坐标系下：

$$\begin{cases} A^{r}=\dfrac{DV^{r}}{Dt}-V^{\phi}V^{\varphi}r \\ A^{\varphi}=\dfrac{DV^{\varphi}}{Dt}+2V^{r}V^{\varphi}\dfrac{1}{r} \\ A^{z}=\dfrac{DV^{z}}{Dt} \end{cases}\Rightarrow$$

$$物理分量\begin{cases} a^{r}=\dfrac{A^{r}}{\sqrt{g^{rr}}}=A^{r}=\dfrac{Dv^{r}}{Dt}-\dfrac{v^{\varphi}v^{\varphi}}{r} \\ a^{\varphi}=\dfrac{A^{\varphi}}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}}=rA^{\varphi}=r[\dfrac{D\frac{v^{\varphi}}{r}}{Dt}+2\dfrac{v^{r}v^{\varphi}}{r^{2}}]=\dfrac{Dv^{\varphi}}{Dt}+\dfrac{v^{r}v^{\varphi}}{r^{2}} \\ a^{z}=\dfrac{Dv^{z}}{Dt} \end{cases}$$

4 动能

$$K=\tfrac{1}{2}\vec{V}\bullet\vec{V}=\tfrac{1}{2}V^{i}V_{i}=\tfrac{1}{2}g_{ij}V^{i}V^{j}$$

5 湍动能 $k=\dfrac{1}{2}\vec{V}'\bullet\vec{V}'=\dfrac{1}{2}g_{ij}V'^{i}V'^{j}$

6 速度环量和流量

$$\Gamma=\oint\vec{V}\bullet d\vec{r}=\oint\vec{V}\bullet\vec{e}_{i}dx^{i}=\oint V_{i}dx^{i}=\oint g_{ij}V^{j}dx^{i}$$

$$Q_{1}=\rho\vec{V}\bullet d\vec{s}_{23}=\rho\vec{V}\bullet\left[dx^{2}\vec{e}_{2}\times dx^{3}\vec{e}_{3}\right]=\rho V^{1}\sqrt{g}dx^{2}dx^{3}$$

$$Q+dQ=\rho V^{1}\sqrt{g}dx^{2}dx^{3}+\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\rho V^{1}\sqrt{g}\right)dx^{1}dx^{2}dx^{3}$$

质量守恒方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho V^i\sqrt{g}\right)dx^1dx^2dx^3=0$$

即：$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\left(\rho V^i\sqrt{g}\right)}{\partial x^i}=0$

$$\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\bullet\rho\vec{V}=0$$

7 流线方程

$$\vec{V}\times d\vec{r}=\vec{0}$$

即

$$\vec{V}\times\vec{e}_j dx^j=V^i\vec{e}_i\times\vec{e}_j dx^j=\sqrt{g}\left(V^2dx^3-V^3dx^2\right)\vec{e^1}$$

$$+\sqrt{g}\left(V_3dx^1-V_1dx^3\right)\vec{e^2}+\sqrt{g}\left(V_1dx^2-V_2dx^1\right)\vec{e^3}=\vec{0}$$

所以 $\dfrac{dV_1}{dx^1}=\dfrac{dV_2}{dx^2}=\dfrac{dV_3}{dx^3}$

5.2 Langrange 导数与 Euler 导数

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi\left(t+\Delta t,x^1+\Delta x^1,x^2+\Delta x^2,x^3+\Delta x^3\right)-\Phi\left(t,x^1,x^2,x^3\right)}{\Delta t}\Big|_{\text{沿流线}}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta t,x^i+\Delta x^i)}{\Delta t}\Big|_{\text{流线}}$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}\Big|_{\text{流线}}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{V}\bullet\nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{\text{欧拉}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi\left(t+\Delta t,x^i\right)-\phi\left(t,x^i\right)}{\Delta t}\Big|_{x^i}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

5.3 任意曲线坐标系下气动方程组的张量表示

速度散度的物理意义：

$$\frac{D\delta v}{\delta vDt}=\frac{1}{\sqrt{g}\delta x^1\delta x^2\delta x^3}\frac{D\left(\sqrt{g}\delta x^1\delta x^2\delta x^3\right)}{Dt}$$

$$=\frac{D\sqrt{g}}{\sqrt{g}Dt}+\frac{D\delta x^i}{\delta x^iDt}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}+V^{i}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{i}}\right)+\frac{\partial V^{i}}{\partial x^{i}}=\frac{1}{\sqrt{g}}V^{i}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial V^{i}}{\partial x^{i}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}V^{i}\right)}{\partial x^{i}}=\nabla\bullet\vec{V}$$

1 连续性方程

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\bullet\vec{V}=0$$

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}V^{i}\right)}{\partial x^{i}}=0$$

2 动量方程

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\nabla\bullet P+\rho\vec{f}$$

$$\rho\left(\frac{DV^{i}}{Dt}+V^{j}V^{k}T_{jk}^{i}\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}P^{ki}}{\partial x^{k}}+P^{kj}T_{jk}^{i}+\rho f^{i}$$

3 能量方程

$$\rho\frac{D\left(e+\frac{1}{2}\vec{V}\bullet\vec{V}\right)}{Dt}=\rho\vec{f}\bullet\vec{V}+\nabla\bullet\left(P\bullet\vec{V}\right)+\nabla\bullet k\nabla T+\dot{q}$$

$$\rho\frac{D\left(e+\frac{1}{2}g_{ij}V^{i}V^{j}\right)}{Dt}=\rho g_{ij}f^{i}V^{j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\sqrt{g}P^{ij}g_{jk}V^{k})+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(g^{ij}k\frac{\partial T}{\partial x^{j}})+\dot{q}$$

$$\nabla\bullet k\nabla T=\nabla\bullet k\vec{e}^{i}\frac{\partial T}{\partial x^{i}}=\nabla\bullet(\vec{e}_{j}g^{ij}k\frac{\partial T}{\partial x^{i}})=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(g^{ij}k\frac{\partial T}{\partial x^{j}})$$

$$\Delta\bullet(P\bullet\vec{V})=\Delta(\vec{e}_{i}P^{ij}\vec{e}_{J}\vec{V})=\Delta(\vec{e}_{i}P^{ij}V_{J})=\Delta(\vec{e}_{i}P^{ij}g_{jk}v^{k})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\sqrt{g}P^{ij}g_{jk}v^{k})$$

4 熵方程　（$\Phi=\tau:S\geq 0$，$\nabla\bullet(P\bullet\vec{V})=(\nabla\bullet P)\bullet\vec{V}+P:S$）

$$\rho T\frac{Ds}{Dt}=\Phi+\nabla\bullet k\nabla T+\dot{q}$$

$$=\Phi+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(g^{ij}k\frac{\partial T}{\partial x^{i}})+\dot{q}$$

5 状态方程

$$P=P(\rho,T)$$

6 本构方程（牛顿流体）

$$P=-pI+E\cdot\cdot S$$

$$
\begin{aligned}
P^{ij} &= -pg^{ij} + E^{ijkl}S_{kl} \\
&= -pg^{ij} + \lambda g^{ij} g^{kl} S_{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) S_{kl} \\
&= -Pg^{ij} + \lambda g^{ij} S_k^k + u(S^{ij} + S^{ij}) \\
&= -Pg^{ij} + \lambda g^{ij} S_k^k + 2uS^{ij}
\end{aligned}
$$

7 几何方程

$$
S^{ij} = \tfrac{1}{2}(\nabla^i V^j + \nabla^j V^i)
$$

第六章 张量分析在叶轮机械气体动力学中应用

6.1 叶轮机械气动力学的知识结构

基础课（数学，力学）

专业基础课（流体力学，传热学，工热）

原理课 （流体机械原理）

张量分析

叶轮机械气体动力学理论基础（控制方程组及简化，气动命题）

叶轮机械内流数值方法（流线曲率法，通流矩阵法）

计算流体力学（有限差分法，有限元法，有限体积法）

计算方法与程序设计语言

全四维（三维非定常流）

全三元（定常三维流）

准三元（S2m×n 个 S1）

两类流面（s1, s2）

两元（平面 圆柱面）

一元

6.2 绝对流动与相对流动的变换关系

绝对静止圆柱坐标系 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$

相对旋转圆柱坐标系 $(x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}) = (r, \varphi, z)$

$$\begin{cases} x^{*1} = x^1 \\ x^{*2} = x^2 - \omega t \\ x^{*3} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^* = r \\ \varphi = \theta - \omega t \\ z = z \end{cases}$$

坐标变换特点：（1）与时间有关。绝对张量对时间的变化率，在两类坐标系中一般不同：绝对流动与相对流动。（2）绝对张量在空间的变化率相等：$\dfrac{\partial}{\partial x^{*i}} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$\vec{e}_i^* = \vec{e}_i$

1 $\dfrac{\partial * \phi}{\partial t^*} \sim \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ 的关系

对于绝对标量，同一点 P 处的 $\phi^*(t^*, x^{*i}) = \phi^*(t, r, \varphi, z) = \phi(t, r, \theta, z) = \phi(t, P)$

物理意义：

$$\frac{\partial * \phi^*_{(t,r,\varphi,z)}}{\partial t^*}\Big|_{(r,\varphi,z)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi_{(t+\Delta t, r, \theta+\omega\Delta t, z)} - \phi_{(t,r,\theta,z)}}{\Delta t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\omega$$

数学推导：

$$\frac{\partial * \phi^*_{(t,r,\varphi,z)}}{\partial t^*}\Big|_{(r,\varphi,z)} = \frac{\partial * \phi_{(t,r,\theta,z)}}{\partial t}\Big|_{(r,\varphi,z)} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{(r,\theta,z)} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}\Big|_{(r,\varphi,z)} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\omega$$

2 $\dfrac{D^*\phi}{Dt^*} \sim \dfrac{D\phi}{Dt}$的关系

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{W} + \omega \vec{e}^z \times r\vec{e}^r = \vec{W} + \omega \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} C^r = W^r \\ C^\theta = W^\varphi + \omega \\ C^z = W^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^r = w^r \\ c^\theta = w^\varphi + \omega r \\ c^z = w^z \end{cases}$$

$$\frac{D^*\phi}{Dt^*} = \frac{\partial * \phi}{\partial t^*} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \overrightarrow{e_\phi} \bullet \nabla \phi + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \phi$$
$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\omega \overrightarrow{e_\phi} + \overrightarrow{W}) \bullet \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{C} \bullet \nabla \phi = \frac{D\phi}{Dt}$$

3 $\dfrac{\partial * \overrightarrow{A}}{\partial t^*} \sim \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$的关系

对空间固定点P：

$$\overrightarrow{e_r^*} = \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi^*} = \overrightarrow{e_\phi}, \overrightarrow{e_z^*} = \overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{e_i^*} = \frac{\partial \overrightarrow{r_p}}{\partial x^{*i}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_p}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_p}}{\partial x^j} \delta_i^j = \frac{\partial \overrightarrow{r_p}}{\partial x^i} = \overrightarrow{e_i};$$

对于绝对矢量$\overrightarrow{A^*} = \overrightarrow{A}$在新老坐标系中分量也相等

$$A^{*i} = \overrightarrow{A^*} \bullet \overrightarrow{e^{*i}} = \overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{e^i} = A^i$$

$$\frac{\partial * \overrightarrow{A^*}}{\partial t^*} = \frac{\partial * A^{*i}}{\partial t^*} \overrightarrow{e_i^*} = \frac{\partial * A^i}{\partial t^*} \overrightarrow{e_i} = [\frac{\partial A^i}{\partial t} + \omega \frac{\partial A^i}{\partial \theta}] \overrightarrow{e_i} = \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial A^i}{\partial \theta} \overrightarrow{e_i} + \omega A^i \frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial \theta} - \omega A^i \frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial \theta} - \omega A^i \frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial \theta} = \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial \phi} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A}$$

即有$\dfrac{\partial * \overrightarrow{A}}{\partial t^*} = \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial \phi} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A}$

4 $\dfrac{D^*\overrightarrow{A}}{Dt^*} \sim \dfrac{D\overrightarrow{A}}{Dt}$的关系

$$\frac{D^*\overrightarrow{A}}{Dt^*} = \frac{\partial * \overrightarrow{A}}{\partial t^*} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \overrightarrow{A} = \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial \theta} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \overrightarrow{A} = \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial \theta} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \overrightarrow{A} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A}$$
$$= \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \omega \overrightarrow{e_\theta} \bullet \nabla \overrightarrow{A} + \overrightarrow{W} \bullet \nabla \overrightarrow{A} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A} = \frac{D\overrightarrow{A}}{Dt} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A}$$

即有$\dfrac{D^*\overrightarrow{A}}{Dt^*} = \dfrac{D\overrightarrow{A}}{Dt} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{A}$

若$\vec{A}=\vec{r}$，则$\vec{W}=\frac{D^*\vec{r}}{Dt^*}=\frac{D\vec{r}}{Dt}-\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{C}-\vec{\omega}\times\vec{r}$，即 $\vec{C}=\vec{W}+\vec{\varpi}\times\vec{r}$

6.3 相对流动的气动方程组

1 $\frac{D\vec{C}}{Dt}\sim\frac{D^*\vec{W}}{Dt^*}$的关系

$$\frac{D\vec{C}}{Dt}=\frac{D(\vec{W}+\vec{\omega}\times\vec{r})}{Dt}=\frac{D^*(\vec{W}+\vec{\omega}\times\vec{r})}{Dt^*}+\vec{\omega}\times(\vec{W}+\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{D^*\vec{W}}{Dt^*}+\vec{\omega}\times\frac{D^*\vec{r}}{Dt^*}+\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\frac{D\vec{C}}{Dt}=\frac{D^*\vec{W}}{Dt^*}+2\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

例 1：证明 $\nabla\bullet\vec{C}=\nabla\bullet\vec{W}$（绝对不可压流动=相对不可压流动）

$$\nabla\bullet\vec{C}=\nabla\bullet(\vec{W}+\vec{\omega}\times\vec{r})=\nabla\bullet\vec{W}+\nabla\bullet(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\nabla\bullet\vec{W}+\nabla\bullet(\overrightarrow{\omega e_\phi})=\nabla\bullet\vec{W}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial\varphi}=\nabla\bullet\vec{W}$$

例 2 证明 $\nabla\times\vec{C}=\nabla\times\vec{W}+2\vec{\omega}$（绝对无旋流动必为相对有旋流动）

证：$\nabla\times\vec{C}=\nabla\times(\vec{W}+\vec{\omega}\times\vec{r})=\nabla\times\vec{W}+\nabla\times(\overrightarrow{\omega e_\phi})=\nabla\times\vec{W}+\nabla\times(\omega r^2\overrightarrow{e^\phi})$

$$=\nabla\times\vec{W}+\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{pmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{pmatrix}=\nabla\times\vec{W}+\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\vec{e_r} & \vec{e_\phi} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \omega r^2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\nabla\times\vec{W}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r}\vec{e_z}=\nabla\times\vec{W}+2\omega\vec{e_z}=\nabla\times\vec{W}+2\vec{\omega}$$

2 相对流动 NS 方程组

$$\begin{cases}\frac{D_a\rho}{Dt}+\rho\nabla\bullet\vec{C}=0\\ \rho\frac{D_a\vec{C}}{Dt}=\nabla\bullet P\end{cases}\quad a\text{----------绝对坐标系}$$

$$\begin{cases}\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\bullet\vec{W}=0\\ \rho[\frac{D\vec{W}}{Dt}+2\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]=\nabla\bullet P\end{cases}\quad\text{相对流动}$$

例：推导相对定常无粘不可压流动的伯努利方程

解：

$$\frac{D\vec{W}}{Dt}+2\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{1}{\rho}\nabla\bullet P\xrightarrow{\text{无粘}}-\nabla p\text{（两边同时点乘}\vec{W}\text{）}$$

$$\frac{D\frac{1}{2}\overline{W^2}}{Dt}+0-\omega^2 rW^r=-\frac{1}{\rho}\vec{W}\bullet\nabla p\xrightarrow{\frac{D\bar{p}}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{W}\bullet\nabla p}-\frac{D\bar{p}}{Dt}+\frac{\partial p}{\partial t}\xrightarrow{\text{定常}}-\frac{D\bar{p}}{Dt}$$

$$\Rightarrow\frac{D(\frac{1}{2}\overline{W^2}-\frac{1}{2}\omega^2 r^2+\frac{p}{\rho})}{Dt}=0(\text{不可压})\quad\left\langle\frac{D(\frac{1}{2}\overline{W^2}-\frac{1}{2}\omega^2 r^2+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho})}{Dt}=0(\text{可压})\right\rangle$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\rho(\overline{W^2}-\omega^2 r^2)+p\xrightarrow{\text{沿流线}}const$$

$\frac{1}{2}\rho(\overline{W^2}-\omega^2 r^2)+p$为相对滞止压力守恒

$$\frac{1}{2}(w_r^2+w_\varphi^2+w_z^2-\omega^2 r^2)+p/\rho=\frac{1}{2}\rho(c_r^2+(c_\theta-\omega r)^2+c_z^2-\omega^2 r^2)+p/\rho$$

$$=\frac{1}{2}(c^2-2c_u u)+p/\rho=\text{常数}$$

$$(\frac{1}{2}c_2^2+p_2/\rho)-(\frac{1}{2}c_1^2+p_1/\rho)=C_{2u}u_2-C_{1u}u_1$$

例：推导相对定常无粘绝热可压流动的能量守恒方程

解：

热二定律：$T\Delta S=\Delta U+p\Delta\frac{1}{\rho}=\Delta U+\Delta\frac{p}{\rho}-\frac{1}{\rho}\Delta p=\Delta h-\frac{1}{\rho}\Delta p$

$$\frac{D\vec{W}}{Dt}+2\vec{\omega}\times\vec{W}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\nabla h+T\nabla S$$

等熵流：

$$i=h+\frac{1}{2}(\vec{W}^2-\omega^2 r^2)=\text{const}$$

相对滞止焓，即转焓守恒，转焓：rotenthalpy 由吴仲华提出。

第七章 张量分析在固体力学中的作用

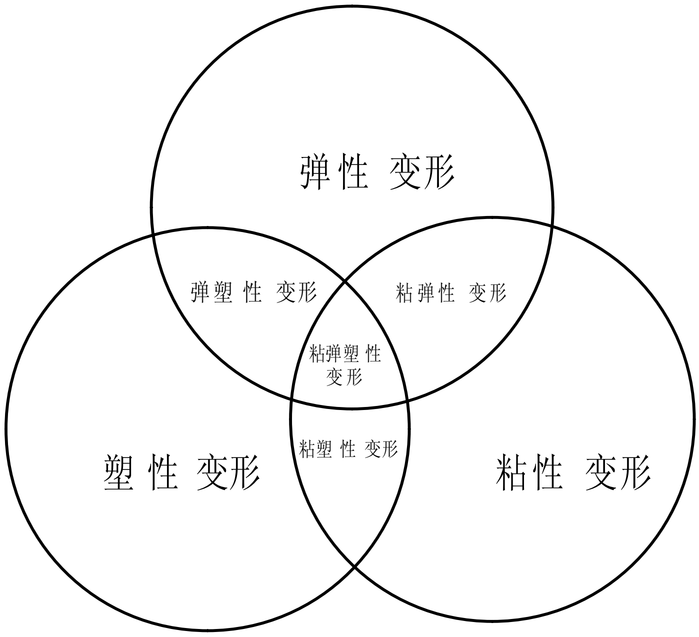
固体力学研究可变形固体在外加因素（机电热载荷等）作用下其内部质点的运动、位移、速度、应变、应力及破坏等规律的学科。

变形种类：

（1）按变形性质分：弹性变形，塑性变形，粘性变形；$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t, T, E)$

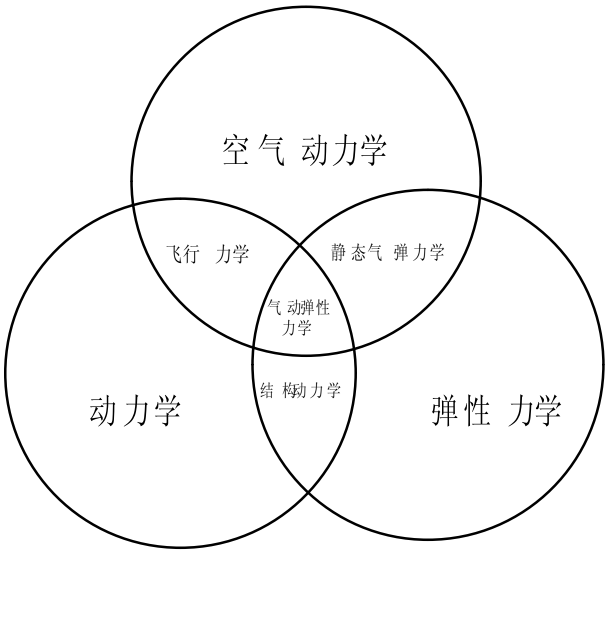
（2）按变形大小分：线性小变形，非线性有限变形；

（3）按变形维度分：杆系变形（一维），板壳膜变形（二维），三维变形



分支学科：材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学、结构稳定性、振动力学、断裂力学、复合材料力学、疲劳与强度、粘弹性理论、粘弹塑性理论。

气动弹性理论：空气动力学、动力学、弹性力学



7.1 应力张量

1．应力张量是二阶绝对张量（应力平衡条件）

$$\vec{p}^{n}=\overrightarrow{n}\cdot P \qquad （柯西应力公式）$$

2．应力张量是对称张量（应力矩平衡条件）

$$p^{ij}=p^{ji}$$

证明：见讲义

3．应力张量的主轴、主值、不变量

正应力=法应力，剪应力=切应力=剪切应力，主应力=主方向上的应力。

$$\overrightarrow{p^{n}}=\vec{n}\bullet P=\lambda\vec{n}\Rightarrow\vec{n}\bullet(P-\lambda I)=n_{i}(p_{j}^{i}-\lambda\delta_{j}^{i})=0\Rightarrow det(p_{j}^{i}-\lambda\delta_{j}^{i})=0$$

主应力的性质

（1）不变性（特征值不变性）

应力张量的第一不变量、第二不变量、第三不变量

$$p_{m}^{*n}=\frac{\partial x^{*n}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{*m}}p_{j}^{i}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^{*1}}{\partial x^{1}}&\frac{\partial x^{*1}}{\partial x^{2}}&\frac{\partial x^{*1}}{\partial x^{3}}\\\frac{\partial x^{*2}}{\partial x^{1}}&\frac{\partial x^{*2}}{\partial x^{2}}&\frac{\partial x^{*2}}{\partial x^{3}}\\\frac{\partial x^{*3}}{\partial x^{1}}&\frac{\partial x^{*3}}{\partial x^{2}}&\frac{\partial x^{*3}}{\partial x^{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{1}^{1}&p_{2}^{1}&p_{3}^{1}\\p_{1}^{2}&p_{2}^{2}&p_{3}^{2}\\p_{1}^{3}&p_{2}^{3}&p_{3}^{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{*1}}&\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{*2}}&\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{*3}}\\\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{*1}}&\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{*2}}&\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{*3}}\\\frac{\partial x^{3}}{\partial x^{*1}}&\frac{\partial x^{3}}{\partial x^{*2}}&\frac{\partial x^{3}}{\partial x^{*3}}\end{pmatrix}$$

存在变换矩阵 $Q=(\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^{j}})$ 使得：$QPQ^{-1}=\begin{Bmatrix}\lambda_{1}&&\\&\lambda_{2}&\\&&\lambda_{3}\end{Bmatrix}$

（2）正交性

不同 λ_i 对应的主方向 $\vec{n}_i$，$\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j=1(i=j)$或$0\,(i\neq j)$

因此可以找到三个单位正交的主方向，使得该三个方向作用面上只存在法应力，其值为主应力，而剪切应力为 0.

（3）实数性

（4）极值性：主应力 λ_i 为所有法向应力的极值，$\vec{p}^{n}=\vec{n}\cdot P=\lambda\vec{n}$

证明：$p_{n}^{n}=n_{i}p_{j}^{i}n^{j}$ 的极值 （约束条件：$n_{i}n^{i}=1$）

$$f=n_{i}p_{j}^{i}n^{j}-\lambda(n_{i}n^{i}-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_{i}}=p_{j}^{i}n^{j}+n_{i}p_{j}^{i}\delta_{i}^{j}-2\lambda n^{i}=p_{j}^{i}n^{j}+n^{j}p_{j}^{i}-2\lambda n^{j}\delta_{j}^{i}$$

$$=2n^{j}(p_{j}^{i}-\lambda\delta_{j}^{i})$$

4．最大剪切力（主剪切力）

问题：三个主应力 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3$ 对应的三个单位正交主方向为 $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$，

找出 $\vec{n} = n^i \vec{l_i}$，使得 $\vec{n}$ 方向的剪切应力最大。

$$\overrightarrow{p^n} = \vec{n} \cdot p = n_i p^{ij} \overrightarrow{l_j}$$

$$N = \overrightarrow{p^n} \cdot \vec{n} = n_i p^{ij} n_j = n_1^2 \lambda_1 + n_2^2 \lambda_2 + n_3^2 \lambda_3$$

$$S^2 = |\overrightarrow{p^n}|^2 - N^2 = (n_1\lambda_1)^2 + (n_2\lambda_2)^2 + (n_3\lambda_3)^2 - (n_1^2\lambda_1 + n_2^2\lambda_2 + n_3^2\lambda_3)$$

约束条件：$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

n_1	± 1	0	0	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
n_2	0	± 1	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
n_3	0	0	± 1	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
S^2	0	0	0	$(\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2})^2$	$(\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2})^2$	$(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2})^2$

则最大剪切应力发生在（$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$）方向上，为 $\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2}$

5. 静水应力、偏应力张量

$$p = \frac{1}{3} p_i^i$$

$$\tilde{P}_j^i = P_j^i - p\delta_j^i$$

7.2 应变张量

1．有限应变张量

物体 B 经过任意变形后为 b；

$B \to b, P(X^1, X^2, X^3) \to p(x^1, x^2, x^3)$，$Q \to q$，$d\vec{r}_P \to d\vec{r}_p$，

$dS = |d\overrightarrow{r_P}|, ds = |d\overrightarrow{r_p}|$；

问题：$ds^2 - dS^2 = ?$

$$dS^2 = G_{IJ}dX^I dX^J = \underbrace{G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j}}_{c_{ij}} dx^i dx^j$$

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \underbrace{g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}}_{C_{IJ}} dX^I dX^J$$

$$ds^2 - dS^2 = \underbrace{(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J} - G_{IJ})}_{2E_{IJ}} dX^I dX^J = \underbrace{(g_{ij} - G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j})}_{2e_{ij}} dx^i dx^j$$

用 E_{IJ} e_{ij} 来衡量是否变形；（对于刚体 $e_{ij} = E_{IJ} = 0$ ）

$C_{IJ} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}$：格林变形张量（拉格朗日坐标）

$c_{ij} = G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j}$：柯西变形张量（欧拉坐标系）

$E_{IJ} = \frac{1}{2}(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J} - G_{IJ})$：拉格朗日/格林有限应变张量

$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial x^J}{\partial x^j})$：欧拉/柯西有限应变张量

上述张量均为对称张量，令：位移矢量 $\vec{u} = \overrightarrow{Pp} = U^I\vec{E}_I = U_I\vec{E}^I = u^i\vec{e}_i = u_i\vec{e}^i$

$$2E_{IJ} = \frac{\partial\overline{r_p}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^I}\bullet\frac{\partial\overline{r_p}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^J} - G_{IJ} = \frac{\partial\overline{r_p}}{\partial x^I}\frac{\partial\overline{r_p}}{\partial x^J} - G_{IJ}$$

$$= \underbrace{(\frac{\partial\overline{r_P}}{\partial x^I} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial x^I})}_{E_I}\bullet\underbrace{(\frac{\partial\overline{r_P}}{\partial x^J} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial x^J})}_{E_J} - G_{IJ}$$

$$= \nabla_I U_J + \nabla_J U_I + \nabla_I U^K \nabla_J U_K$$

同理，$2e_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k$

以上公式中，$\overline{r_p} = \overline{r_P} + \overline{U}$ ，U 和 u 均为位移。

2．在小变形情况下：$E_{IJ} = e_{ij}$

小变形假设：$\vec{u} \to 0, x^I \to x^i, u_i \to U_I, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$

在笛卡尔坐标系下：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial y^i} + \frac{\partial u_i}{\partial y^j})$

在任意曲线坐标系下：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j}) - u_k \Gamma_{ij}^k$

3．ε_{ij} 是二阶绝对对称张量

4．ε_{ij} 的主方向、主值、不变量

5．最大剪应变

6. 球应变张量及偏应变张量

7.3 应力——应变本构方程

1．经典弹性理论假设：

（1）连续介质假设；

（2）完全弹性假设；

（3）线性假设；

（4）各向同性假设；

（5）小变形假设；

（6）无初应力假设

2．经典弹性体的本构方程（胡克定律

$$p^{ij} = \pi^{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{[利用了（3）、（5）、（6）]}$$

$$\overset{(4)}{=} [\lambda g^{ij} g^{kl} + \mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk})]\varepsilon_{kl}$$

$$= \lambda g^{ij} \varepsilon_k^k + 2\mu\varepsilon^{ij}$$

3．弹性常数的物理意义：

λ：拉梅常数，（0，＋∞）

μ：拉梅常数，（0，＋∞）

$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$：杨氏模量，拉伸弹性模量

$\nu = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$：泊松比，（0， $1/2$）

（以上两项：单向拉伸变形）

$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{p}_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \mu$：剪切模量，（0，＋∞）：纯剪切变形

$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{p}}{\varepsilon_{mm}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$：体积模量，（0，＋∞）：静水变形

六个常数只有二个独立。

7.4 控制方程组（经典弹性力学基本方程组）

1．控制方程组

静力方程平衡方程

$$\nabla \cdot P + \overline{F} = 0 \qquad \nabla_j p^{ij} + F^i = 0 \qquad \text{（3 个方程）}$$

物理方程（本构方程）

$$p^{ij} = \lambda g^{ij} \varepsilon_k^k + 2\mu \varepsilon^{ij} \qquad \text{（6 个方程）}$$

几何方程：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \qquad \text{（6 个方程）}$$

共计 15 个方程，15 个变量，是线性方程。（固体材料 μ 很大，各种小量可以忽略）

2. 以位移矢量 u_i 表示的平衡方程

3．笛卡尔坐标系下的控制方程：

$$\frac{E}{2(1+\nu)}[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}] + F_x = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}] + F_y = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}] + F_z = 0$$

其中 $e = \nabla \bullet \vec{u}$

目　录

第一章　三维欧氏空间中的张量

§1-1　引言——什么是张量

在物理学中常常会遇到一些不能单用一个数字表示的量。最简单的例子是力$\boldsymbol{F}$，速度$\boldsymbol{v}$，加速度$\boldsymbol{a}$，电场强度$\boldsymbol{E}$，电极化强度$\boldsymbol{P}$等等。这些量除了大小以外还有方向，通常称它们为**矢量**。许多物理规律用公式表示出来都是矢量之间的等式。例如，牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}, \tag{1-1-1}$$

电介质的极化定律

$$\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{E}, \tag{1-1-2}$$

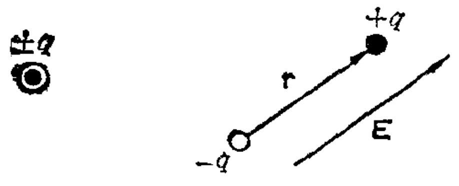
等等。式中m和α分别是粒子的质量和介质的电极化率。

我们来较仔细地讨论后一个例子。在电介质中加上电场$\boldsymbol{E}$，使得介质的分子极化。在未加电场时，分子的正电荷中心与负电荷中心重合，如图1-1(a)。外电场$\boldsymbol{E}$将分子的正、负电荷中心拉开一个距离$\boldsymbol{r}$，如图1-1(b)。用$\pm q$表示分子中正、负电荷的电量，则有电偶极矩

$$\boldsymbol{d}=q\boldsymbol{r}.$$

单位体积中的电偶极矩称为介质的**电极化强度$\boldsymbol{P}$**。

式(1-1-2)表示介质的电极化强度与加在介质上的电场强度$\boldsymbol{E}$成正比。比例系数α表征了所讨论的介质的性质，称为**电极化率**。



(a)加电场前　　(b)加电场后

图1-1　外电场E使介质分子极化的示意图．实心圆表示正电荷中心，空心圆圈表示负电荷中心．

图　1-1

但是，式(1-1-2)只适用于各向同性介质．某些介质在不同方向有不同性质．这种不同方向有不同性质的介质称为**各向异性**介质．对于这种介质，在不同方向加同样强度的电场，所产生的电极化强度的大小不同，而且其方向也不一定和所加的电场方向一致．这种介质的电极化规律不能简单地用(1-1-2)式表示，它们的"电极化率"不是一个简单的数．这是物理量不能用一个单一的数字表示的又一例子．

所有这些不能用一个单一的数字表示的物理量统称为张量[注]．张量以它的阶数（又称为秩数）来分类．矢量是一阶张量的例子；各向异性介质中的电极化率是二阶张量的例子．

通常定义矢量**A**为"既有大小，又有方向的量"，这种定义不便于推广．下面我们采用**A**的另一定义，即矢量**A**为"具有三个分量A_x, A_y, A_z的量"．为了便于书写，将x，y，z三个方向分别用1，2，3表示．于是矢量**A**可以用三个数表示为(A_1, A_2, A_3)，或简写为A_i $(i=1,2,3)$．由于它有一个下标i，所以称为**一阶张量**．

各向异性介质中的电极化率是这样一个物理量，它将一个矢量$\boldsymbol{P}$和另一个矢量$\boldsymbol{E}$建立对应关系，而$\boldsymbol{P}$并不和$\boldsymbol{E}$简单成正比，其方向也不一定和$\boldsymbol{E}$平行．但是，当电场$\boldsymbol{E}$不太强

〔注〕这不是张量的精确定义．张量的定义将在§1-4中给出．另外，还应指出，广义地说只用一个数就能表示的量也是一种张量，即零阶张量——标量．

时，**P**和**E**的对应关系仍然是线性关系〔注〕，它可以用分量表示为：

$$\left.\begin{aligned}P_1=\alpha_{11}E_1+\alpha_{12}E_2+\alpha_{13}E_3\\P_2=\alpha_{21}E_1+\alpha_{22}E_2+\alpha_{23}E_3\\P_3=\alpha_{31}E_1+\alpha_{32}E_2+\alpha_{33}E_3\end{aligned}\right\},\qquad(1\text{-}1\text{-}3)$$

或缩写为

$$P_i=\sum_{j=1}\alpha_{ij}E_j\qquad(i=1,2,3).\quad(1\text{-}1\text{-}4)$$

由此可见，各向异性介质的电极化率可以用九个数$\alpha_{ij}(i,j=1,2,3)$表示，它有两个下标i,j，所以称为二阶张量。

但是，矢量分量的值是与坐标系的选择有关的。当我们将坐标系$(Oxyz)$转一个角度成为$(Ox'y'z')$时，矢量**A**的分量也由(A_x,A_y,A_z)变为(A_x',A_y',A_z')。在不同的坐标系中，同一矢量的分量有不同的值.我们知道，矢量(例如力**F**，加速度**a**，电场强度**E**，电极化强度**P**)是客观的物理量，它们应该与坐标系的人为选择无关；然而，为了定量地表示它们，又必须选定一个坐标系给出它们的分量。这是一个矛盾。解决这一矛盾的方法是规定矢量分量在坐标变换时的变换规律.知道了这一变换规律，只要在一个坐标系中给出某一矢量的分量，也就等于在任意坐标系中都给出了它的分量。这样给出的矢量就是一个与坐标系无关的客观物理量。

同样的讨论也适用于二阶和更高阶的张量。一个n阶张量的完整定义包括：在一个坐标系中给出3^n个数，和规定

〔注〕 可以认为**P**是**E**的解析函数，满足条件：当**E**=0时，**P**=0.如果**E**不太强，可以将这一函数展开成泰勒级数，只取不为零的第一项。这就是(1-1-3).

这些数在坐标变换时的变换规律两部分。

我们看到，张量分量在坐标变换时的变换规律是张量定义中的一个不可缺少的部分。因此，在§1-4中给出张量的定义和运算之前，先在下两节中复习一下三维空间中的矢量代数和坐标变换。

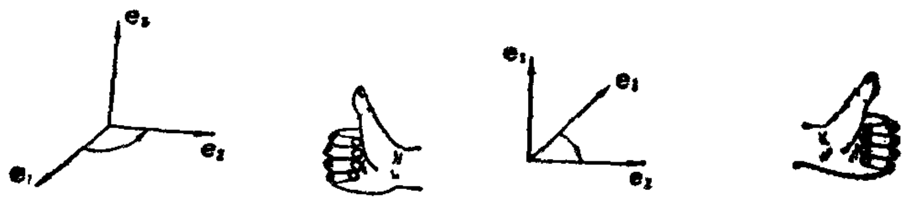
§1-2 矢量代数

一、坐标基矢

在这一章中的全部讨论都采用直角坐标系（笛卡尔坐标系），这种坐标系的三个坐标轴方向的单位矢量用$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$表示。可以区分下面两种情况：如果由$\boldsymbol{e}_1$按右手螺旋旋转到$\boldsymbol{e}_2$可以得到$\boldsymbol{e}_3$，如图1-2($a$)，则称为**右手坐标系**；如果由$\boldsymbol{e}_1$按左手螺旋旋转到$\boldsymbol{e}_2$得到$\boldsymbol{e}_3$，如图1-2($b$)，就称为**左手坐标系**。

这一节只讨论右手坐标系。

三个单位矢量$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$称为坐标基矢。由于它们相互垂直，所以，不同$\boldsymbol{e}_i$的点积为零；而由于它们是单位矢量，所以，同一个$\boldsymbol{e}_i$的自乘（点积）等于1。亦即：



(a)右手坐标系　　　　(b)左手坐标系

图 1-2 两类坐标系

$$
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} =0 & \text{当} \quad i \neq j \\ =1 & \text{当} \quad i = j. \end{cases} \tag{1-2-1}
$$

定义二阶对称δ符号为

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{当} \quad i \neq j \\ 1 & \text{当} \quad i = j, \end{cases} \tag{1-2-2}
$$

则可以将式(1-2-1)写为

$$
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \tag{1-2-3}
$$

由定义式(1-2-2)可知，δ_{ij}对它的两个下标对称：

$$
\delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{1-2-4}
$$

我们知道，矢量的乘积除点积外还有叉积。两个矢量的叉积是一个垂直于这两个矢量所成平面的矢量，而其大小等于这两矢量的大小之积再乘上两个矢量夹角的正弦。由此立即可知，一个矢量和自身的叉积为零。因此

$$
\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = 0, \quad \text{当} i = j. \tag{1-2-5}
$$

另一方面，由于三个矢量$\boldsymbol{e}_i$相互垂直，且长度都等于1，所以有

$$
\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1-2-6}
$$

式(1-2-5)和式(1-2-6)可以借助于三阶完全反对称ε符号合写成一个式子。**三阶完全反对称符号**ε_{ijk}有三个下标，每个下标都可以取1,2,3三个值。按定义，ε_{ijk}对它的三个下标中任意两个的交换都反对称：

$$
\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}. \tag{1-2-7}
$$

由此立即可知，ε_{ijk}的$3^3 = 27$个分量中，凡是有两个下标取

相同值的分量都是零；不为零的分量只是i,j,k各不相等，分别取1,2,3三个值的六个分量。又由于有(1-2-7)式，因而这六个分量中只有一个是独立的。取这一个独立分量为

$$\varepsilon_{123}=1, \tag{1-2-8}$$

就完全确定了ε_{ijk}。式(1-2-7)和式(1-2-8)合起来是ε_{ijk}的定义。它也可以写为

$$\begin{cases}\varepsilon_{ijk}=0 \quad 当 \quad i=j \quad 或 \quad j=k \quad 或 \quad k=i,\\ \varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=-\varepsilon_{213}=-\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{321}=1\end{cases} \tag{1-2-9}$$

上式第二行可以表述为：ε_{ijk}当i,j,k为1,2,3的偶排列时等于+1；当i,j,k为1,2,3的奇排列时等于-1。

利用ε_{ijk}可以将式(1-2-5)和式(1-2-6)合写为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k. \tag{1-2-10}$$

实际上，由ε_{ijk}的性质，当$i=j$时，式(1-2-10)的右边为零，这就是(1-2-5)。当$i\neq j$时，式(1-2-10)的右边和式的三项中只有$k\neq i,k\neq j$的一项不为零，而由式(1-2-9)就得到(1-2-6)。

式(1-2-3)和式(1-2-10)表达了坐标基矢$\boldsymbol{e}_i(i=1, 2, 3)$的基本性质，它们是以下讨论矢量代数的出发点。

二、任意矢量的点积和叉积

任意矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$可以用坐标基矢展开为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i, \tag{1-2-11}$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$$

$a_i (i=1,2,3)$和$b_i (i=1,2,3)$分别是矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$ 的分量。

在深入讨论之前，先对下标作一些说明。凡是进行了作和的下标称为**哑标**，如式(1-2-11)中的i和式(1-2-10) 中的k。哑标实际上并不取任何特定的值，而是取遍1，2，3三个值。在进行作和以后，哑标不再存在。例如式(1-2-10)的右边k是哑标，左边就不再有k。反之，不作和的下标称为**自由标**。任何等式左、右两边的自由标必须正好对应，如式(1-2-10)中的i和j。

由于哑标只是对下标1,2,3作和的代号，所以它可以换用任意符号。例如式(1-2-10)右边的k换成l，或m或任何其他符号均可。而对自由标就不能任意改动（如果要改动自由标，必须对一个等式的所有各项中出现的这个指标同时改动）.

一条重要的规则是：**当两个和式相乘时，哑标不能重复**。如果这两个和式原来采用的哑标相同，则在将它们相乘时，应该将其中一个哑标换成其他符号。

现在来考虑任意矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的点积和叉积。为了避免哑标重复，先将式(1-2-11)中的第二式的下标i改为j。如是有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j.$$

将式(1-2-3)、式(1-2-10)代入，得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_i b_j \delta_{ij}, \tag{1-2-12}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k. \tag{1-2-13}$$

根据式(1-2-7)，$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}$.代入式(1-2-13)并改换哑标符号，可以将式(1-2-13)改写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i a_j b_k. \tag{1-2-13$'$}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个矢量，式(1-2-13)、式(1-2-13)′是它按坐标基矢展开的展开式，因此，它的分量是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k. \tag{1-2-14}$$

下面来将所得到的点积和叉积的公式化成熟悉的形式。

式(1-2-12)右边的作和式中含有δ_{ij}因子。由于δ_{ij}的性质(1-2-2)，在对j作和时，不为零的只有$j=i$的一项，因而有

$$\sum_{j=1}^{3}b_j\delta_{ij}=b_i. \tag{1-2-15}$$

这可以总结成一条有用的规则：

> 如果在一个式子的某一项中，含有因子δ_{ij}并对j求和，就可以去掉这个δ_{ij}和作和符号，并将这一项里的其他因子中的下标j都换成i。

将式(1-2-15)代入式(1-2-12)得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_i b_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{1-2-16}$$

再来看式(1-2-14)．当$i=1$时，由ε符号的性质(1-2-9)，右边的j和k必须等于2和3；而且当$j=2,k=3$时有正号；当$j=3,k=2$时有负号．当$i=2,3$时也有类似情况。于是有：

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_1&=a_2b_3-a_3b_2\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_2&=a_3b_1-a_1b_3\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_3&=a_1b_2-a_2b_1\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}2\text{-}17)$$

式(1-2-16)和式(1-2-17)就是通常点积和叉积的公式。

在进一步考虑三个矢量的连乘积之前，先来证明δ符号和ε符号的几个有用的公式。

三、δ符号和ε符号的几个公式

首先来看用ε符号写出三阶行列式展开式的公式：

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k.\quad(1\text{-}2\text{-}18)$$

证 考虑三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix},$$

它的展开式的每一项都是三个因子的乘积——从每一行都取一个而且只取一个因子，从每一列也取一个而且只取一个因子。因此，展开式的一般项可以写成

$$\pm a_ib_jc_k\qquad(i\neq j\neq k),$$

其中取正号还是取负号，要视i、j、k是偶排列还是奇排列而定。这样，利用ε符号的性质(1-2-9)，就可以写出(1-2-18)。∎

下面再来证明一个将ε符号和δ符号相联系的公式：

$$\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}. \qquad (1\text{-}2\text{-}19)$$

证 先分析等式左边。根据它的两个ε因子知道：

$$i\neq j\neq k,\quad l\neq m\neq k.$$

结合这两个不等式可知，等式左边不为零的条件是：

$$i=l, j=m, i\neq j \quad 或 \quad i=m, j=l, i\neq j.$$

在第一种情况下．排列i、j、k和k、l、m有相同的奇偶性，因而$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=+1$；在第二种情况下，排列$i$、$j$、$k$和$k$、$l$、$m$的奇偶性相反，因而$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=-1$。由此得到：

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\begin{cases}+1 & 当\quad i=l, j=m, i\neq j\\ -1 & 当\quad i=m, j=l, i\neq j\end{cases} \qquad (1\text{-}2\text{-}20)$$

而在其余情况下，它都等于零。

再来看式(1-2-19)的右边。当$i=l$, $j=m$, $i\neq j$（因而$i\neq m$）时，只有第一项，因而等于$+1$；当$i=m$, $j=l$, $i\neq j$（因而$i\neq l$）时，只有第二项，因而等于-1；这些都和式(1-2-20)相符。还剩下一种情况要考虑，即

$$i=j=l=m,$$

此时，等式(1-2-19)左边为零，而右边的两项都等于1，相减为零。这样就完成了式(1-2-19)的证明。

四、三矢量的连乘

三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的连乘有两种，一种是$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，另一种是$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$。

利用式(1-2-14)和式(1-2-16)有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\sum_{i=1}^{3}a_i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_i=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k. \qquad (1\text{-}2\text{-}21)$$

利用式(1-2-18)，可以将它写成行列式

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1-2-22}$$

将这一行列式的三行进行轮换，其值不变，因而得到

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b). \tag{1-2-23}$$

再来看三个矢量的连叉乘$a\times(b\times c)$。先用式(1-2-14)：

$$(b\times c)_k=\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}b_l c_m$$

再用一次式(1-2-14)：

$$[a\times(b\times c)]_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j(b\times c)_k$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_j b_l c_m.$$

利用式(1-2-19)可以完成上式中对k的作和：

$$[a\times(b\times c)]_i=\sum_{j,l,m=1}^{3}(\delta_{il}\delta_{jm}a_j b_l c_m-\delta_{im}\delta_{jl}a_j b_l c_m)$$

$$=b_i(a\cdot c)-c_i(a\cdot b).$$

在得到后一行时用了式(1-2-12)和式(1-2-15)。上 式 对于$i=1,2,3$都对，因而可以合写成矢量等式

$$[a\times(b\times c)]=b(a\cdot c)-c(a\cdot b). \tag{1-2-24}$$

用类似的办法不难计算更多个矢量的连乘积。

§1-3 坐标变换

这一节讨论不同坐标系之间的变换。我们不考虑坐标平

移，而只讨论坐标原点不动的变换，其中包括**转动**，**镜面反射**和**反演**.这三种变换都保持矢量点积的公式(1-2-12)不变，统称为**正交变换**.

下面先考虑基矢的变换，然后再看矢量分量的变换。

一、基矢的变换

设原来坐标系的基矢为

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3. \tag{1-3-1}$$

转动后的坐标基矢为

$$\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}, \tag{1-3-2}$$

这三个矢量在原坐标系(1-3-1)中的分量用

$$(A_{1'1}, A_{1'2}, A_{1'3}),$$
$$(A_{2'1}, A_{2'2}, A_{2'3}),$$
$$(A_{3'1}, A_{3'2}, A_{3'3}),$$

表示，因而有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= A_{1'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{1'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{1'3}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= A_{2'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{2'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{2'3}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{3'} &= A_{3'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{3'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{3'3}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\}, \tag{1-3-3}$$

这就是新旧坐标基矢之间的变换公式。它可以缩写成

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{3} A_{i'i}\boldsymbol{e}_i \qquad (i' = 1,2,3). \tag{1-3-4}$$

为了求$A_{i'i}$，先改写式(1-3-4)中的哑标i为l，再用$\boldsymbol{e}_i$点乘左、右两边，并利用式(1-2-3)：

$$\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i = \sum_{l=1}^{3} A_{i'l}\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_i = \sum_{l=1}^{3} A_{i'l}\delta_{li}.$$

利用δ符号的性质求出对l的作和，得到

$$A_{i'i}=\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i. \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

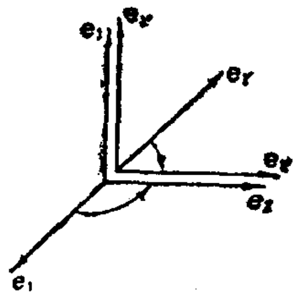
由于$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_{i'}$都是单位矢量，所以它们的点积就是它们夹角的余弦。因此，$A_{i'i}$等于新旧坐标轴夹角的余弦。

下面分几种情况讨论。

1．坐标转动

在坐标转动过程中，坐标轴夹角的余弦$A_{i'i}$可以在-1到$+1$之间连续地变化。在此过程中，三个坐标基矢结合成一个整体一道转动，因此坐标系的类型不变，即：右手坐标系转动后仍然是右手坐标系，左手坐标系转动后仍然是左手坐标系。

2．镜面反射


图1-3　镜面反射

为了具体起见，假定是对$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$所在平面的镜面反射如图1-3。此时，第一个坐标基矢改号而另外两个基矢不变。用公式写出就是：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{1'}&=-\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_{2'}&=\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_{3'}&=\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

和式(1-3-3)比较可见

$$\left.\begin{aligned}&A_{1'1}=-1, A_{2'2}=A_{3'3}=1,\\ &A_{i'i}=0 \qquad \text{当} \quad i'\neq i.\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

由图1-3可见，镜面反射的结果，坐标系的类型发生改变——右手坐标系变成左手坐标系，左手坐标系变成右手坐标系。

3．反演

三个坐标基矢都改号的变换叫反演，如图1-4。用公式写出就是：

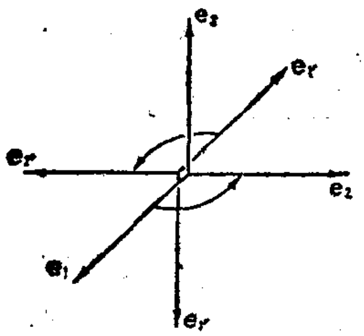


图1-4 反演

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= -e_1 \\ e_{2'} &= -e_2 \\ e_{3'} &= -e_3 \end{aligned}\right\} \tag{1-3-8}$$

和(1-3-3)比较可见：

$$\left.\begin{aligned} &A_{1'1} = A_{2'2} = A_{3'3} = -1, \\ &A_{i'i} = 0, \quad 当 \quad i' \neq i \end{aligned}\right\} \tag{1-3-9}$$

比较图1-3和图1-4可见，反演可以看成是先进行对e_2e_3平面的镜面反射，然后绕第1轴转180°而得到。由于转动不改变坐标系的类型，所以反演和镜面反射一样，使坐标系的类型发生变化。这一点也可以直接从图1-4看到。

二、赝矢量和赝标量

坐标基矢叉乘的定义式(1-2-10)〔即式(1-2-6)〕，以及由它推出的两个任意矢量叉乘的公式(1-2-14)〔即式(1-2-17)〕在任意坐标系中都有相同的形式。然而，在两类不同的坐标系中，坐标基矢之间有不同的旋转关系，如图1-2，因此，在这两类坐标系中，矢量的叉乘实际上得到不同的结果——在右手坐标系中，矢量的叉乘$a\times b$和矢量a,b之间形成右手螺旋关系；而在左手坐标系中，$a\times b$和a,b之间形成左手螺旋关系。

我们常说两矢量的叉乘是一个矢量，现在我们发现，它是一个特殊的“矢量”。它的特殊性在坐标系的类型发生变化时显示出来。例如，假定在右手坐标系中计算$a\times b$，则它和a,b形成右手螺旋关系。经过坐标反演，坐标系变成左手

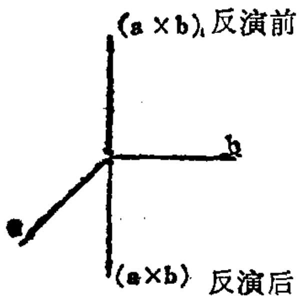


图1-5　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$在反演后改变方向

坐标系，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$有左手螺旋关系，如图1-5。因此，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$在坐标反演时改变方向。

这种在坐标反演时要改变方向的矢量叫做**赝矢量**〔注〕。除了两个真矢量的叉乘是赝矢量以外，角速度矢量、角动量矢量都是赝矢量的例子。

由于坐标转动不改变坐标系的类型，所以如果只考虑坐标转动，赝矢量和真矢量没有区别。

如果$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是两个真矢量，则它们的点积是一个在转动和反演下都不变的数。这样的数称为**标量**。

如果一个真矢量和一个赝矢量点乘，则所得到的数只在转动下不变，而在反演时要改号。这样的数称为赝标量。例如，三个真矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的混合连乘积$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$就是一个赝标量（因为$\boldsymbol{a}$是真矢量，而$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$是赝矢量）．

三、矢量分量的变换规律

一个矢量（真矢量）$\boldsymbol{a}$用坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$展开为

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i. \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

在坐标变换（包括转动和反演）时，基矢$\boldsymbol{e}_i$发生变化(1-3-4)，而作为一种客观物理对象的$\boldsymbol{a}$应保持不变，因此$\boldsymbol{a}$的分量a_i必须相应地变化。

写出$\boldsymbol{a}$用新坐标基矢$\boldsymbol{e}_{i'}$的展开式：

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i'=1}^{3}a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}. \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

〔注〕 赝矢量又称为轴矢量，相应地称真矢量为极矢量.

它和(1-3-10)应该相等，故有

$$\sum_{i'=1}^{3} a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=\sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i. \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

将等式左边的哑标改写为l'，并用$\boldsymbol{e}_{i'}$点乘左、右两边，再利用式(1-2-3)和式(1-3-5)，得到

$$a_{i'}=\sum_{i=1}^{3} A_{i'i}a_i \qquad (i'=1,2,3). \qquad (1\text{-}3\text{-}13)$$

和式(1-3-4)比较可见，矢量的分量和坐标基矢有相同的变换规律。

如果$\boldsymbol{a}$是赝矢量，情况就有所不同。在坐标反演时，赝矢量要改变方向（参看图1-5）。因此，式(1-3-12)应改写为

$$\sum_{i'=1}^{3} a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i & \text{当坐标转动，}\\ -\sum\limits_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i & \text{当坐标反演。}\end{cases} \qquad (1\text{-}3\text{-}14)$$

而式(1-3-13)应相应地写成

$$a_{i'}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3} A_{i'i}a_i & \text{当坐标转动，}\\ -\sum\limits_{i=1}^{3} A_{i'i}a_i & \text{当坐标反演。}\end{cases} \qquad (1\text{-}3\text{-}15)$$

这说明，赝矢量的分量在坐标转动时和坐标基矢一样地变换，而在坐标反演时和坐标基矢的变换相差一个符号。

四、正交变换

以上所讨论的几种坐标变换（转动、反演和镜面反射）

都保持矢量点积的公式(1-2-16)不变：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_i b_i=\sum_{i'=1}^{3}a_{i'}b_{i'}. \qquad (1\text{-}3\text{-}16)$$

这样的变换称为**正交变换**。下面讨论正交变换的条件。

将式(1-3-13)代入式(1-3-16)，得到

$$\sum_{i=1}^{3}a_i b_i=\sum_{i'=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}A_{i'j}a_i b_j$$

为使此式对于任意的矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都成立，需要

$$\sum_{i'=1}^{3}A_{i'i}A_{i'j}=\delta_{ij}. \qquad (1\text{-}3\text{-}17)$$

式(1-3-17)是正交变换所应满足的一个条件。利用它可以得到式(1-3-13)的逆变换式。如将式(1-3-13)右边的哑标改写为j，然后用$A_{i'i}$乘等式两边，并对i'作和，可以得到

$$\sum_{i'=1}^{3}A_{i'i}a_{i'}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i'=1}^{3}A_{i'i}A_{i'j}a_j$$

将式(1-3-17)代入，并利用δ_{ij}的性质算出对j的作和，得到

$$a_i=\sum_{i'=1}^{3}A_{i'i}a_{i'}. \qquad (1\text{-}3\text{-}18)$$

如果说式(1-3-13)是由a_i到$a_{i'}$的“正变换”，那么式(1-3-18)就是由$a_{i'}$到a_i的逆变换。用$A^{-1}_{ii'}$表示这一逆变换的系数，

$$a_i=\sum_{i'=1}^{3}A^{-1}_{ii'}a_{i'} \qquad (1\text{-}3\text{-}19)$$

则由式(1-3-18)可知

$$A^{-1}_{ii'}=A_{i'i}.\qquad(1\text{-}3\text{-}20)$$

如果将$(A_{i'i})$看成一个矩阵，则$(A^{-1}_{ii'})$是它的转置逆矩阵。式(1-3-20)表明，正交变换矩阵的转置逆矩阵等于它自身。这可以简写为：

$$\tilde{A}^{-1}=A.\qquad(1\text{-}3\text{-}21)$$

将式(1-3-18)和b_i，$b_{i'}$的类似式子代入式(1-3-16)中，不难证明

$$\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}A_{j'i}=\delta_{i'j'}.\qquad(1\text{-}3\text{-}22)$$

式(1-3-17)、(1-3-22)和式(1-3-21)、(1-3-20)等效。它们是正交变换所应满足的条件。

(1-3-17)、(1-3-22)这两式有直观的意义。注意，$A_{i'i}$的第一个下标i'是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{1'1} & A_{1'2} & \cdots\\ A_{2'1} & A_{2'2} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\qquad(1\text{-}3\text{-}23)$$

的行标号，而$A_{i'i}$的第二个下标i是矩阵A的列标号。式(1-3-22)的右边当$i'\neq j'$时等于0，这表示矩阵A的不同行的对应元素相乘作和等于零；而式(1-3-22)的右边当$i'=j'$时等于1，这表示矩阵A同一行的各元素的平方和等于1。将每一行的三个元素看成一个矢量的三个分量，则上述论断可以表述为：矩阵A的不同行所代表的矢量相互正交，而每一行所代表的矢量长度为1。类似地，(1-3-17)式表明，矩阵A的不同列所代表的矢量相互正交，而每一列所代表的矢量长度为1。这是正交矩阵的性质。

§1-4　三维欧氏空间中张量的定义

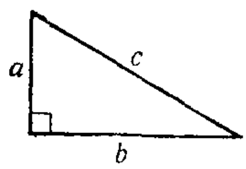
一、三维欧氏空间

普通的三维空间称为三维欧氏空间[注]。“欧氏”两个字表示这一空间中的几何学是初等欧几里德几何。

欧几里德几何中有一条“勾股弦定理”，它指出：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方：

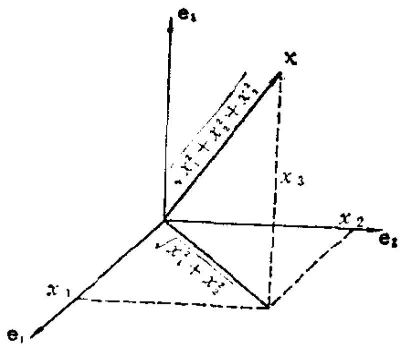
$$a^2+b^2=c^2,$$

如图1-6。如果在三维空间中有一个矢量$\boldsymbol{x}$，它的三个分量是x_1, x_2, x_3，则将勾股弦定理应用两次可见，$\boldsymbol{x}$的长度的平方$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$等于三个分量的平方和：



直角三角形的勾股弦

图1-6



三维欧氏空间中矢量的长度

图1-7

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i x_j \delta_{ij}, \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

如图1-7。

式(1-4-1)是式(1-2-12)

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j \delta_{ij} \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

〔注〕 在本书中，不加说明的“欧氏空间”都指真欧氏空间。

的特例。我们在这里强调，它成立的条件是欧几里德几何学中的勾股弦定理，因而只在欧氏空间中才成立。可以用式(1-4-2)作为欧氏空间的定义：

定义 矢量点积的公式具有式(1-4-2)形式的空间称为欧氏空间。

下面给出三维欧氏空间中张量的定义。

二、张量的定义

1．一阶张量

前面已经指出，一阶张量的最简单例子是矢量。现在我们要为它下一个精确的定义。

把矢量称为一阶张量是强调它在坐标变换时的变换性质。考虑一个矢量$\boldsymbol{x}$，它在某一坐标系$\boldsymbol{e}_i$($i=1,2,3$)中的分量是x_i($i=1,2,3$)。当坐标变换时，$\boldsymbol{x}$的分量也要发生变换，如式(1-3-13)、(1-3-15)。但是，矢量$\boldsymbol{x}$是一个客观存在的与坐标系的选择无关的对象。我们所关心的是矢量$\boldsymbol{x}$本身所具有的与坐标系的选择无关的性质；然而，在定量地研究这些性质时，又必须利用$\boldsymbol{x}$在一定的坐标系中的分量x_i。这是一个矛盾，而"张量"的概念正是从这一矛盾中引出的。

正如绪论中所指出，为了解决上述矛盾，在某一坐标系中给出一阶张量的分量x_i的同时，还规定它在坐标变换时的变换规律。这样一来，就等于知道了它在任意坐标系中的分量，从而得到了一个与坐标系的选择无关的客观物理量。

遵循这一思路，我们将前面得到过的变换规律式(1-3-13)、(1-3-15)，提升作为定义来定义一阶张量：

定义 在坐标系$\boldsymbol{e}_i$($i=1,2,3$)中给定三个数x_i($i=1,2,$

3)；如果当坐标变换

$$e_{i'}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}e_i \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

时，它按

$$x_{i'}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

变，则称它为一阶张量；如果它按

$$x_{i'}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i & \text{当坐标转动}\\ -\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i & \text{当坐标反演}\end{cases} \qquad (1\text{-}4\text{-}5)$$

变，则称它为一阶赝张量。

显然，矢量的三个分量构成一阶张量。但不要以为一阶张量只能由矢量的分量构成。例如，设有一个不经过原点的平面，它的方程可以写成

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=1. \qquad (1\text{-}4\text{-}6)$$

不难证明，当坐标变换为式(1-4-3)时，三个分量a_i($i=1$，2,3)也按规律(1-4-4)变换。因此，它们也构成一阶张量。

2．二阶张量

作为二阶张量的例子，考虑在§1-1中讨论过的各向异性介质中的电极化率α_{ij}。α_{ij}在两个一阶张量E_j和P_i之间建立线性联系，如(1-1-4)式：

$$P_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}E_j \qquad (i=1,2,3). \qquad (1\text{-}4\text{-}7)$$

在坐标变换(1-4-3)时，E_j变成$E_{j'}$，P_i变成$P_{i'}$，相应地α_{ij}也变成$\alpha_{i'j'}$，使(1-4-7)不变：

$$P_{i'}=\sum_{j'=1}^{3}\alpha_{i'j'}E_{j'}\qquad(i'=1,2,3).\quad(1\text{-}4\text{-}8)$$

将一阶张量E_j和P_i的变换规律

$$E_{j'}=\sum_{j=1}^{3}A_{j'j}E_j,\qquad P_{i'}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}P_i$$

代入上式，得到

$$\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}P_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3}\alpha_{i'j'}A_{j'j}E_j.$$

将式(1-4-7)代入，并改写右边的哑标j'为l'，得到

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}\alpha_{ij}E_j=\sum_{j=1}^{3}\sum_{l'=1}^{3}\alpha_{i'l'}A_{l'j}E_j.$$

这一等式对任意E_j都成立，因而有

$$\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}\alpha_{ij}=\sum_{l'=1}^{3}\alpha_{i'l'}A_{l'j}.$$

用$A_{j'j}$乘左、右两边，对j作和，将式(1-3-22)代入，然后用δ符号的性质求出对l'的作和，得到

$$\alpha_{i'j'}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}A_{j'j}\alpha_{ij}.\qquad(1\text{-}4\text{-}9)$$

这就是二阶张量α_{ij}在坐标变换时的变换规律。与式(1-4-3)比较可见，α_{ij}的两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律进行变换，这可以作为二阶张量的定义：

定义 在任一坐标系中给出具有两个下标的九个数，当坐标变换时，这两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律进行变换，则这九个数构成一个二阶张量。

这一定义中谈到的是二阶“真”张量. 如果所给的九个数在坐标反演时，除了两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律变换之外，还要改号，则得到的是二阶赝张量.

从以上对于一阶和二阶张量的定义可以看出，在张量的定义中包含两个要点：第一，在某一坐标系中给出一组数；第二，给出这一组数在坐标变换时的变换规律。由于有了第二点，所以尽管张量分量的具体数值是在某一特定的坐标系中给出的，实际上也就知道了它在**任意坐标系**中的分量数值。而这样一来，就有了可能深入研究张量所具有的**与坐标系无关**的性质。以下，在介绍了高阶张量的一般定义以后，将要进一步说明如何利用张量计算来研究张量所具有的与坐标系无关的不变性质。

现在再来看两个二阶张量的例子。

【例1】当弹性物体发生形变时，在它内部的各部分之间会出现相互作用力，称为应力。考虑这样一个物体内部的一个小元面积，如图1-8。

设其大小为$d\alpha$，法线方向单位矢量为n，则$d\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{n}d\alpha$，是代表这一元面积的矢量。位于这一元面积左边部分的物体（在图1-8中用Ⅰ表示）对位于它右边部分的物体（图中用Ⅱ表示）作用一个力$\boldsymbol{f}$。一般说来，$\boldsymbol{f}$的方向和$d\boldsymbol{\alpha}$的方向不同（它包含平行于$d\boldsymbol{\alpha}$的压应力和垂直于$d\boldsymbol{\alpha}$的切应力两部

分），但当$d\alpha$很小时，力$\boldsymbol{f}$和面积元$d\boldsymbol{\alpha}$有线性关系。改变$d\boldsymbol{\alpha}$的大小和方向，力$\boldsymbol{f}$的大小和方向也随之改变，因而可以写

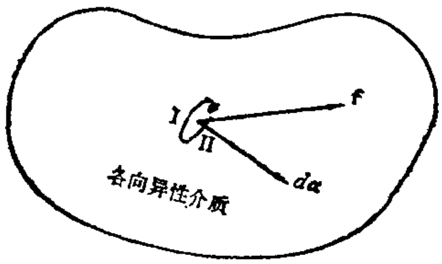


图1-3 各向异性介质中的应力

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}(d\boldsymbol{\alpha}),$$

其中$\boldsymbol{F}(d\boldsymbol{\alpha})$表示以$d\boldsymbol{\alpha}$为自变量的一个线性矢量函数。将$\boldsymbol{f}$和$d\boldsymbol{\alpha}$用某一坐标系中的分量表示：

$$\boldsymbol{f}:\quad f_1, f_2, f_3;$$
$$d\boldsymbol{\alpha}:\quad d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3.$$

则上述函数关系可以写成

$$f_1=\sigma_{11}d\alpha_1+\sigma_{12}d\alpha_2+\sigma_{13}d\alpha_3$$
$$f_2=\sigma_{21}d\alpha_1+\sigma_{22}d\alpha_2+\sigma_{23}d\alpha_3$$
$$f_3=\sigma_{31}d\alpha_1+\sigma_{32}d\alpha_2+\sigma_{33}d\alpha_3,$$

或缩写成

$$f_i=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}d\alpha_j. \qquad (1-4-10)$$

容易证明，这一式子中的σ_{ij}是一个二阶张量（称为应力张量）。重复由式(1-4-7)到式(1-4-9)的推导，就可以证明这一论断。

【例2】证明按式(1-2-2)定义的二阶对称δ符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & 当\quad i\neq j\\ 1 & 当\quad i=j\end{cases} \qquad (1-4-11)$$

是一个二阶张量。

证 假定在某一坐标系中按式(1-4-11)给出了δ_{ij}。我们所要证明的是，如果在坐标变换时，让它按二阶张量的规律变，则在新坐标系中，它的分量仍然取式(1-4-11)所规定

的值。

按张量的变换规律(1-4-9)，

$$\delta_{i'j'}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}A_{j'j}\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}A_{j'i}.$$

但是，根据正交变换的性质(1-3-22)，

$$\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}A_{j'i}=\begin{cases}0 & \text{当}\quad i'\neq j'\\ 1 & \text{当}\quad i'=j'.\end{cases}$$

这就证明了，按式(1-4-11)定义的δ_{ij}在坐标变换后，其各个分量的值不变。也就是说，在任意坐标系中都按(1-4-11)定义的二阶对称δ符号是一个二阶张量。

3. 高阶张量

高阶张量的定义可以从一阶和二阶张量的定义推广而来。

定义 在任一坐标系中给出具有ν个下标的3^ν个数，当坐标变换时，这ν个下标分别独立地按照和坐标基矢的变换规律相同的规律变换：

$$a_{i_1'i_2'\cdots i_\nu'}=\sum_{i_1i_2\cdots i_\nu}A_{i_1'i_1}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_\nu'i_\nu}a_{i_1i_2\cdots i_\nu}\tag{1-4-12}$$

则这3^ν个数$a_{i_1i_2\cdots i_\nu}$构成一个ν阶张量。

如果$a_{i_1i_2\cdots i_\nu}$在坐标转动时按式(1-4-12)变，而在坐标反演时，比式(1-4-12)差一个符号：

$$a_{i_1'i_2'\cdots i_\nu'}=\begin{cases}\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_\nu}A_{i_1'i_1}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_\nu'i_\nu}a_{i_1i_2\cdots i_\nu} & \text{当坐标转动}\\ -\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_\nu}A_{i_1'i_1}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_\nu'i_\nu}a_{i_1i_2\cdots i_\nu} & \text{当坐标反演}\end{cases}\tag{1-4-13}$$

则$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$构成一个ν阶赝张量。

以上各式中的作和符号没有写出作和范围，而隐含着从1到3的作和。

实际上，上述定义是张量的普遍定义，其中包括$\nu=0$的零阶张量，即标量（赝标量），以及$\nu=1,2$的一阶、二阶张量（赝张量）。下面再举一个三阶张量($\nu=3$)的例子。

【例3】 有些晶体有压电效应。当它由于形变而产生应力时，会出现电场。用σ_{jk}表示应力张量（见例1），D_i表示由于压电效应产生的电感应矢量$\boldsymbol{D}$的分量，则D_i是σ_{jk}的函数。这一函数关系可以写成

$$D_i=\sum_{jk} 4\pi\gamma_{ijk}\sigma_{jk}, \qquad (1\text{-}4\text{-}14)$$

证明γ_{ijk}是一个三阶张量（称为压电张量）。

证 当坐标变换时，D_i和σ_{jk}分别按式(1-4-4)和式(1-4-9)变：

$$D_{i'}=\sum_i A_{i'i}D_i, \qquad (1\text{-}4\text{-}15)$$

$$\sigma_{j'k'}=\sum_{jk} A_{j'j}A_{k'k}\sigma_{jk}. \qquad (1\text{-}4\text{-}16)$$

将后一式子按式(1-3-18)的形式写成逆变换

$$\sigma_{jk}=\sum_{j'k'} A_{j'j}A_{k'k}\sigma_{j'k'}, \qquad (1\text{-}4\text{-}17)$$

将式(1-4-17)和式(1-4-14)一道代入式(1-4-15)，有

$$\begin{aligned}D_{i'}&=\sum_{ijk} 4\pi A_{i'i}\gamma_{ijk}\sigma_{jk}\\&=\sum_{ijk}\sum_{j'k'} 4\pi A_{i'i}A_{j'j}A_{k'k}\gamma_{ijk}\sigma_{j'k'},\end{aligned}$$

但是，在新坐标系中，压电效应的规律(1-4-14)式也应成立：

$$D_{i'}=\sum_{j'k'}4\pi\gamma_{i'j'k'}\sigma_{j'k'}.$$

比较以上二式，得到

$$\gamma_{i'j'k'}=\sum_{ijk}A_{i'i}A_{j'j}A_{k'k}\gamma_{ijk}. \qquad (1-4-18)$$

这就证明了γ_{ijk}是三阶张量。

三、张量的整体符号

以上我们是在笛卡尔坐标中给出张量的分量来定义张量。但是，张量也可以用整体符号表示，这种表示在有些情况下（特别是对于一阶和二阶张量）用起来比较方便。

以一阶张量为例，它用分量写出是a_i，将a_i乘上坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$并作和，就得到

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i \qquad (1-4-19)$$

这就是代表一阶张量的整体符号。它就是通常的矢量符号。

与此类似，将二阶张量的分量a_{ij}乘上坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_j$并作和，得到代表二阶张量的整体符号

$$\overleftrightarrow{a}=\sum_{ij=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j. \qquad (1-4-20)$$

注意，上式右边并排书写的两个矢量$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_j$之间不进行任何矢量运算——既不叉乘，也不点乘。它们是两个独立的单位矢量，共同构成二阶张量的基。

将式(1-4-19)中的哑标i改为l，再用$\boldsymbol{e}_i$点乘，得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=\sum_{l=1}^{3}a_l(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_i).$$

利用式(1-2-3)就可看到，上式右边等于a_i，即

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i. \qquad (1\text{-}4\text{-}21)$$

这是由整体符号$\boldsymbol{a}$求分量a_i的公式。

类似地，将式(1-4-20)中的哑标i，j改写为l,m,再用$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_j$分别从左边和右边点乘，得到

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\overleftrightarrow{a}\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_{l\,m=1}^{3}a_{lm}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_j)$$

$$=\sum_{l\,m=1}^{3}a_{lm}\delta_{il}\delta_{mj}=a_{ij}$$

即

$$a_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\overleftrightarrow{a}\cdot\boldsymbol{e}_j. \qquad (1\text{-}4\text{-}22)$$

这是由二阶张量的整体符号$\overleftrightarrow{a}$求分量a_{ij}的公式。

【例4】 将电极化的规律式(1-4-7)写成整体符号的形式。

解 电极化率α_{ij}写成整体符号是

$$\overleftrightarrow{\alpha}=\sum_{i\,j=1}^{3}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j. \qquad (1\text{-}4\text{-}23)$$

将它和电场强度

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{3}E_i\boldsymbol{e}_i \qquad (1\text{-}4\text{-}24)$$

点乘，得

$$\overleftrightarrow{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}=\sum_{i\,j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ij}E_k\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)$$

$$=\sum_{i\,j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ij}E_k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\Big(\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}E_j\Big).$$

将式(1-4-7)代入，得到

$$\overleftrightarrow{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_iP_i=\boldsymbol{P}. \qquad (1\text{-}4\text{-}25)$$

这就用整体符号写出了电极化规律(1-4-7)式。

从这个例子可看到，写成整体符号的二阶张量，可以和矢量（一阶张量）点乘，得到另一矢量。这种点乘一般说来与次序有关，即$\boldsymbol{E}\cdot\overleftrightarrow{\alpha}$一般说来不等于$\overleftrightarrow{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}$，只在$\overleftrightarrow{\alpha}$是对称二阶张量——$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$时，两者才相等。

一个重要的二阶张量是δ_{ij}(见例2)，它称为二阶单位张量。它的整体符号是

$$\overleftrightarrow{e}=\sum_{i\,j=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i. \qquad (1\text{-}4\text{-}26)$$

它和任意矢量$\boldsymbol{a}$的点积还等于这一矢量自身：

$$\overleftrightarrow{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{e}=\boldsymbol{a}. \qquad (1\text{-}4\text{-}27)$$

证

$$\overleftrightarrow{e}\cdot\boldsymbol{a}=\sum_i\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{a})=\sum_i\boldsymbol{e}_ia_i=\boldsymbol{a}.$$

对于$a\cdot\vec{\vec{e}}$也有同样结果。

§1-5 三维欧氏空间中的张量运算

在这一节里，我们先讨论三维欧氏空间中张量的几种代数运算，然后再举一些例子。

一、张量的运算

张量运算的基本要求是：运算结果所得到的仍然是一个张量。这一要求的理由是，只有这样才能使运算在坐标变换下具有不变性，从而能够在任意坐标系中进行。

张量的代数运算包括加法、乘法、缩并和置换。

1．张量的加法

设有两个同阶张量$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$和$b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$，它们的和是对应分量分别作和：

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} + b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} . \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

容易证明，如果在任一坐标系中都按此计算，则$c_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$构成一个ν阶张量（即它按ν阶张量的变换规律变换）。这就是说，按式(1-5-1)定义的加法运算对坐标变换具有不变性。

注意，只有阶数相同的张量才能相加。

2．张量的乘法

设有两个张量$a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}$，$b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$，则它们的乘积是

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} b_{i_{\mu+1} i_{\mu+2} \cdots i_{\mu+\nu}} . \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

很容易证明，按此式定义的$c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}}$是一个$\mu+\nu$阶的张量。

注意，进行乘法的两个张量的阶数不一定相同，乘积张量的阶数等于它们二者的阶数之和。

还应注意，在式(1-5-1)，式(1-5-2)中，下标$i_1, i_2, \cdots, i_{\mu+\nu}$都只能取1,2,3这三个值；而“下标的 下标”1，2，…，$\mu+\nu$是用来标志各个不同下标的符号，取从1到$\mu+\nu$的整数值。

张量乘法的最简单例子是两个一阶张量相乘得二阶张量。设有两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，它们的分量a_i, b_j构成两个一阶张量；它们的乘积

$$c_{ij}=a_i b_j \tag{1-5-3}$$

是一个二阶张量，称为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的并矢。利用式(1-4-20)定义的整体符号，可将并矢写为：

$$\overrightarrow{c}=\sum_{i\,j=1}^{3} c_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\boldsymbol{ab}.$$

3. 张量的缩并

设有一个二阶以上的张量$a_{i_1 i_2\cdots i_\nu}$($\nu\geqslant 2$)，任意选定它的两个下标，例如第1个和第ν个下标，将这两个下标取相等值的那些分量抽出来并作和：

$$c_{i_2 i_3\cdots i_{\nu-1}}=\sum_{l=1}^{3}a_{l i_2 i_3\cdots i_{\nu-1} l}, \tag{1-5-4}$$

则$c_{i_2 i_3\cdots i_{\nu-1}}$称为$a_{i_1 i_2\cdots i_\nu}$对下标$i_1$和$i_\nu$的缩并，它有$\nu-2$个下标，我们来证明它是一个$\nu-2$阶张量。

证 在坐标变换时，$a_{i_1 i_2\cdots i_\nu}$变为

$$a_{i_1'i_2'\cdots i_\nu'}=\sum_{i_1i_2\cdots i_\nu}A_{i_1'i_1}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_\nu'i_\nu}a_{i_1i_2\cdots i_\nu}.$$

在新坐标系中，类似于式(1-5-4)，有

$$c_{i_2'i_3'\cdots i_{\nu-1}'}=\sum_{l'=1}^{3}a_{l'i_2'i_3'\cdots i_{\nu-1}'l'}$$

$$=\sum_{l'}\sum_{i_1i_2\cdots i_\nu}A_{l'i_1}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_{\nu-1}'i_{\nu-1}}A_{l'i_\nu}a_{i_1i_2\cdots i_\nu}.$$

利用式(1-3-17)计算对l'的作和，得到$\delta_{i_1i_\nu}$，从而又可以算出对i_ν的作和。于是有

$$c_{i_2'i_3'\cdots i_{\nu-1}'}$$

$$=\sum_{i_2i_3\cdots i_{\nu-1}}A_{i_2'i_2}\cdots A_{i_{\nu-1}'i_{\nu-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{3}a_{i_1i_2\cdots i_{\nu-1}i_1}\right).$$

将此式中的哑标i_1改写成l，和式(1-5-4)相比得到

$$c_{i_2'i_3'\cdots i_{\nu-1}'}=$$

$$\sum_{i_2i_3\cdots i_{\nu-1}}A_{i_2'i_2}A_{i_3'i_3}\cdots A_{i_{\nu-1}'i_{\nu-1}}c_{i_2i_3\cdots i_{\nu-1}}.$$

这就证明了 $c_{i_2i_3\cdots i_{\nu-1}}$是一个$\nu-2$阶的张量。

缩并运算是一种重要的张量运算。常常还会用到将两个张量先乘起来再缩并的运算。例如，将一个3阶张量a_{ijk}和一个2阶张量b_{lm}相乘，得到一个5阶张量

$$c_{ijklm}=a_{ijk}b_{lm}$$

然后，再将j和l缩并，k和m缩并，得到一个一阶张量：

$$d_i = \sum_{jk} c_{ijkjk} = \sum_{jk} a_{ijk} b_{jk}, \qquad (1-5-5)$$

有时简称d_i为a_{ijk}和b_{jk}的缩并。

许多物理规律的数学表达式都含有张量的缩并。例如，各向异性介质的电极化规律，式(1-4-7)的右边是二阶张量α_{ij}和一阶张量E_j的缩并；各向异性介质中的应力，式(1-4-10)是二阶张量σ_{ij}和一阶张量da_j的缩并；压电效应式(1-4-14)是三阶张量γ_{ijk}和二阶张量σ_{jk}的缩并。由于缩并以后仍然是张量，所以这些等式都是张量之间的等式。在坐标变换时，等式两边都按张量规律变，所以在任意坐标系中等式都成立。通常说，这种等式在坐标变换时是协变的。这句话的意思是说，由于等式左、右两边按同一规律变，所以在坐标变换过程中，等式始终成立。

4. 指标的置换

将一个张量$a_{i_1 i_2 \cdots i_n}$的任意两个下标，例如i_p和i_q的位置互换，仍然得到一个张量：

$$b_{i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n} = a_{i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n}. \qquad (1-5-6)$$

这称为指标置换运算，也是一种重要的张量运算。

二、三阶完全反对称赝张量

现在来证明，按式(1-2-9)〔或(1-2-7)、(1-2-8)〕定义的三阶完全反对称ε符号是一个三阶赝张量。为此先证明，张量指标的对称性和反对称性在坐标变换下不变。

证 设张量$a_{ijk\cdots m}$对下标jk对称：

$$a_{ijk\cdots m} = a_{ikj\cdots m}. \qquad (1-5-7)$$

此式右边是原张量对指标jk置换的结果，所以仍然是一个张

量。式(1-5-7)是张量之间的等式，因而在坐标变换下协变，在新坐标中也成立：

$$a_{i'j'k'\cdots m'}=a_{i'k'j'\cdots m'}.$$

即，张量$a_{ijk\cdots m}$对jk的对称性在坐标变换下仍然保持。

同理，如果$a_{ijk\cdots m}$对jk反对称：

$$a_{ijk\cdots m}=-a_{ikj\cdots m}, \qquad (1\text{-}5\text{-}8)$$

则由于它是张量等式，所以也是在任意坐标系中都成立。

现在来按式(1-2-7)、(1-2-8)定义一个有三个下标的量ε_{ijk}，它对三个下标都反对称

$$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}, \qquad (1\text{-}5\text{-}9)$$

而且

$$\varepsilon_{123}=1. \qquad (1\text{-}5\text{-}10)$$

我们在任意坐标系中都这样定义ε_{ijk}。问题是这样得到的ε_{ijk}是不是张量。

为了回答这一问题，假定在一个特定坐标系中按以上方式定义了ε_{ijk}；然后让它按张量的变换规律变，看看在新坐标系中式(1-5-9)、(1-5-10)是否仍然成立。

由于下标的反对称性在坐标变换下保持，所以只要式(1-5-9)在一个坐标系中成立，它就在任意坐标系中都成立。需要检验的只是式(1-5-10)。

由于下标的完全反对称性，$\varepsilon_{i'j'k'}$的六个不为零的分量或者相等，或者相差符号：

$$\varepsilon_{1'2'3'}=\varepsilon_{2'3'1'}=\varepsilon_{3'1'2'}=-\varepsilon_{2'1'3'}$$
$$=-\varepsilon_{1'3'2'}=-\varepsilon_{3'2'1'}.$$

我们来计算$\varepsilon_{i'j'k'}$的平方：

$$\sum_{i'j'k'}(\varepsilon_{i'j'k'})^2=\sum_{i'j'k'}\varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon_{i'j'k'}$$

$$=6(\varepsilon_{1'2'3'})^2, \qquad (1\text{-}5\text{-}11)$$

另一方面，利用张量的变换性质有

$$\sum_{i'j'k'}(\varepsilon_{i'j'k'})^2$$

$$=\sum_{\substack{i'j'k'\\ijk\\lmn}}A_{i'i}A_{j'j}A_{k'k}\varepsilon_{ijk}A_{i'l}A_{j'm}A_{k'n}\varepsilon_{lmn}.$$

再利用正交变换的性质式(1-3-17)，得到

$$\sum_{i'j'k'}(\varepsilon_{i'j'k'})^2=\sum_{\substack{ijk\\lmn}}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}$$

$$=\sum_{ijk}(\varepsilon_{ijk})^2=6(\varepsilon_{123})^2. \qquad (1\text{-}5\text{-}12)$$

结合式(1-5-11)和式(1-5-10)可见，

$$(\varepsilon_{1'2'3'})^2=1, \quad \varepsilon_{1'2'3'}=\pm 1. \qquad (1\text{-}5\text{-}13)$$

按式(1-5-10)，在坐标变换前，$\varepsilon_{123}=1$；而由(1-5-13)知道，在坐标变换后，$\varepsilon_{1'2'3'}$可能等于$+1$，也可能等于-1。

由于坐标转动是连续变换，不可能引起从$+1$到-1的突变，所以在坐标转动下$\varepsilon_{1'2'3'}=+1$，符合式(1-5-10)。

当坐标反演时，按式(1-3-9)有

$$A_{1'1}=A_{2'2}=A_{3'3}=-1$$

$$A_{1'2}=A_{2'1}=A_{2'3}=A_{3'2}=A_{3'1}=A_{1'3}=0.$$

因此，

$$\varepsilon_{1'2'3'}=A_{1'1}A_{2'2}A_{3'3}\varepsilon_{123}=(-1)^3\times 1=-1,$$

和式(1-5-10)差符号。

我们看到，如果让ε_{ijk}按三阶真张量的规律变换，则在坐标转动下式(1-5-10)仍然成立，而在坐标反演下和式(1-5-10)差符号。我们希望在任意坐标系中，式(1-5-9)、(1-5-10)都成立，因此ε_{ijk}应该在坐标转动下和三阶真张量的变换相同，而在坐标反演下，和三阶真张量的变换规律差符号。这也就是说，ε_{ijk}应该按三阶赝张量的规律变。

这样，我们就证明了，在任意坐标系中都按式(1-5-9)、(1-5-10)定义的ε_{ijk}是一个三阶赝张量，称为三阶完全反对称赝张量。

三、三维欧氏空间中的二阶张量

除一阶张量（矢量）以外，二阶张量是在实际中遇得最多的一种张量。下面我们着重讨论二阶张量的性质。

1．将二阶张量分为对称和反对称部分

如果一个二阶张量b_{ij}对它的两个下标的交换对称：

$$b_{ij}=b_{ji},$$

就称它为二阶对称张量；而如果二阶张量c_{ij}对下标的交换反对称：

$$c_{ij}=-c_{ji},$$

就称它为二阶反对称张量。

一般说来，任意张量a_{ij}既不对称，又不反对称。取它的分量a_{ij}和下标置换后的分量a_{ji}之和用2除，得到一个新的张量：

$$b_{ij}=a_{(ij)}\equiv\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}). \qquad (1-5-14)$$

这一运算称为下标ij的对称化，我们用圆括号将ij括起来表

示对称化运算。显然b_{ij}是一个对称张量。

如果取a_{ij}和a_{ji}之差用2除，就得到

$$c_{ij}=a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}). \qquad (1\text{-}5\text{-}15)$$

这一运算称为下标ij的反对称化，用下标ij加方括号表示。显然，c_{ij}是一个反对称张量。

将以上二式相加，得到

$$a_{ij}=a_{(ij)}+a_{[ij]}. \qquad (1\text{-}5\text{-}16)$$

这样就将一个任意的二阶张量展开成了对称部分和反对称部分之和。

2. 反对称二阶张量

我们来特别研究一下反对称二阶张量b_{ij}。根据它的反对称性知道，只有当$i\neq j$时b_{ij}才不等于零，因而它只有六个不为零的分量。这六个分量组成相差符号的三对：

$$b_{12}=-b_{21},\quad b_{23}=-b_{32},\quad b_{31}=-b_{13} \qquad (1\text{-}5\text{-}17)$$

排成矩阵形式就是

$$(b_{ij})=\begin{pmatrix}0 & b_{12} & -b_{31}\\ -b_{12} & 0 & b_{23}\\ b_{31} & -b_{23} & 0\end{pmatrix}. \qquad (1\text{-}5\text{-}18)$$

可见，有实质意义的（可以独立取值的）只有三个分量——b_{12},b_{23},b_{31}。我们来证明，这三个分量组成一个赝矢量。

为此，取三阶赝张量ε_{ijk}和b_{jk}缩并，然后用2除得到一个一阶赝张量（即赝矢量）：

$$a_i=\frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}b_{jk}. \qquad (1\text{-}5\text{-}19)$$

利用式(1-2-9)和式(1-5-17)，得到：

$$a_1=b_{23}=-b_{32},\quad a_2=b_{31}=-b_{13},$$

$$a_3 = b_{12} = -b_{21}. \tag{1-5-20}$$

因而式(1-5-18)可以写成

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1-5-21}$$

因此，反对称二阶张量实质上等同于一个赝矢量[注]。

【例1】 已知磁场强度H是一个赝矢量，试将它写成一个反对称二阶张量。

解 按式(1-5-21)，和H对应的二阶张量是：

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-5-22}$$

或

$$\left.\begin{array}{c} F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \\ F_{12} = -F_{21} = H_3, F_{23} = -F_{32} = H_1, \\ F_{31} = -F_{13} = H_2 \end{array}\right\} \tag{1-5-23}$$

它称为**磁场强度张量**。

3．二阶张量的不变量

利用二阶张量的九个分量可以组成一些在坐标变换时不变的量（即标量）。在实际问题中这些不变量都具有重要的物理意义。

设有一个二阶张量a_{ij}，将它的两个下标缩并，就得到一个零阶张量，即标量

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{1-5-24}$$

〔注〕 这一结论只在三维欧氏空间中成立。因为，只是在三维欧氏空间中，完全反对称赝张量才是三阶的。

它称为张量a_{ij}的迹。

如果a_{ij}对下标ij反对称，则所有$i=j$的分量都是零，因此，反对称二阶张量的迹为零。

【例2】求两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的并矢的迹。

解 a_i与b_j的并矢是

$$c_{ij}=a_ib_j,$$

它的迹是

$$\sum_{i=1}^{3}c_{ii}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

因此，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的并矢的迹就是矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的点积。

二阶张量的迹可以利用δ_{ij}改写为

$$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{ij}a_{ij}\delta_{ij}. \qquad (1\text{-}5\text{-}25)$$

因此，二阶张量a_{ij}的迹是它与δ_{ij}的缩并。

为了得到a_{ij}的另一个不变量，可以利用三阶完全反对称张量ε_{ijk}。取两个ε_{ijk}和三个a_{ij}缩并，使全部下标缩并掉，得到一个零阶张量——标量：

$$\frac{1}{3!}\sum_{\substack{ijk\\lmn}}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn}. \qquad (1\text{-}5\text{-}26)$$

不难证明，这样得到的不变量就是a_{ij}的行列式：

$$\frac{1}{3!}\sum\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn}=|a_{ij}|$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}5\text{-}27)$$

证 由于式(1-5-26)中有ε_{lmn}，对l,m,n作和，只有l，m，n分别等于1，2，3的六项不为零。首先看$l=1$，$m=2$，$n=3$的一项。根据式(1-5-10)和式(1-2-18)，

$$\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{123}a_{i1}a_{j2}a_{k3}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

对l,m,n作和中的另外五项由ε_{123}的下标交换而得到。例如，交换$1\rightleftharpoons2$，有：

$$\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{213}a_{i2}a_{j1}a_{k3}=$$

$$-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{11} & a_{13}\\ a_{22} & a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

可以看出，所有这六项都相等，都等于a_{ij}的行列式。这就证明了式(1-5-26)。

§1-6 张量场

以上讨论了三维欧氏空间中的张量以及它的几种代数运算。在这一节里讨论张量场以及它的微分运算。

设在空间的每一点$M(x_1,x_2,x_3)$，都给定一个同阶的张量，例如三阶张量$a_{ijk}(M)$，就称它为一个张量场。张量

$$a_{ijk}(M)=a_{ijk}(x_1,x_2,x_3)$$

的每一个分量都是M的坐标x_1,x_2,x_3的函数。我们假定，这一函数的性质足够“好”，可以对x_1，x_2，x_3求导到所需要的次数。

一、导数张量

设有一个ν阶张量场$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M)$。它对$x_l$的偏导数是：

$$\partial_l a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M) \equiv \frac{\partial}{\partial x_l} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M). \qquad (1\text{-}6\text{-}1)$$

我们来证明，它是一个$\nu+1$阶的张量。

证　M点的坐标x_l $(l=1,2,3)$是一个一阶张量，它在坐标变换时的变换规律是

$$x_{l'} = \sum_l A_{l'l} x_l. \qquad (1\text{-}6\text{-}2)$$

根据式(1-3-18)，上式的逆变换是

$$x_l = \sum_{l'} A_{l'l} x_{l'}. \qquad (1\text{-}6\text{-}3)$$

ν阶张量的变换规律是：

$$a_{i_1' i_2' \cdots i_\nu'} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i_1' i_1} A_{i_2' i_2} \cdots A_{i_\nu' i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}. \qquad (1\text{-}6\text{-}4)$$

将此式对$x_{l'}$求导：

$$\partial_{l'} a_{i_1' i_2' \cdots i_\nu'} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i_1' i_1} A_{i_2' i_2} \cdots A_{i_\nu' i_\nu} \frac{\partial}{\partial x_{l'}} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}. \qquad (1\text{-}6\text{-}5)$$

但是，$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$是x_l的函数，而x_l又是$x_{l'}$的函数〔如式(1-6-3)〕，根据复合函数求导的法则

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \frac{\partial x_l}{\partial x_{l'}}.$$

而由式(1-6-3)

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_{l'}} = A_{l'l} \qquad (1\text{-}6\text{-}6)$$

和上式一道代入式(1-6-5)，得到

$$\partial_{l'} a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu}$$

$$= \sum_{l i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{l'l} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} \partial_l a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}. \quad (1\text{-}6\text{-}7)$$

这就证明了式(1-6-1)是一个$\nu+1$阶的张量。我们称它为张量场$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M)$的**导数张量**。它也依赖于空间点$M$，因而是一个$\nu+1$阶张量场。

利用导数张量和δ_{ij}，ε_{ijk}的不同方法缩并，可以得到各种不同的张量场。下面举一些简单的、用途广泛的例子。

二、梯度　散度　旋度

在通常的矢量分析书中研究过梯度、散度和旋度。我们现在利用导数张量来得到它们。这样不仅可以加深对它们的理解，而且可以建立一套系统的完整的计算方法。

1．标量场的梯度

设有一个零阶张量场，即标量场$a(M)$。它的导数张量是一个一阶张量场，称为这一标量场的**梯度**：

$$(\text{grad}\, a)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} a. \qquad (1\text{-}6\text{-}8)$$

2．矢量场的散度和旋度

再来看一阶张量场$a_i(M)$〔即矢量场$\boldsymbol{a}(M)$〕。它的导数张量是一个二阶张量场

$$\partial_l a_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_l} a_i. \qquad (1\text{-}6\text{-}9)$$

将它和δ_{li}缩并，得到一个标量场，称为a_i的**散度**：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \sum_{l\,i} \delta_{li} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \qquad (1\text{-}6\text{-}10)$$

将$\partial_j a_k$和ε_{ijk}缩并，得到一个赝矢量场，称为$\boldsymbol{a}$的**旋度**

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_i = \sum_{j\,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k. \qquad (1\text{-}6\text{-}11)$$

明显写出来就是：

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_1 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_2 &= \frac{\partial a_1}{a x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{aligned}\right\}. \qquad (1\text{-}6\text{-}12)$$

三、高阶导数与乘积的导数

利用以上建立的工具，能很方便地得到矢量分析中的高阶导数与乘积导数的公式。下面举几个例子

【例1】 计算$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{a}$。

解 将式(1-6-11)应用两次，得到

$$\begin{aligned} (\mathrm{rotrot}\boldsymbol{a})_i &= \sum_{j\,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_k \\ &= \sum_{j\,k\,l\,m} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} a_m. \end{aligned}$$

由于ε_{klm}是常张量，可以提到求导之外，所以可以利用式(1-2-19)算出对k的作和：

$$(\text{rotrot}\boldsymbol{a})_i=\sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}a_m$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial x_j}-\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}a_i$$

定义拉普拉斯算符为：

$$\varDelta\equiv\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\qquad(1\text{-}6\text{-}13)$$

得到：

$$\text{rotrot}\boldsymbol{a}=\text{grad div}\boldsymbol{a}-\varDelta\boldsymbol{a}.\qquad(1\text{-}6\text{-}14)$$

这就是常用的rotrot$\boldsymbol{a}$的公式。

【例2】 计算rot$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

解 利用式(1-6-11)和式(1-2-14)得到

$$[\text{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]_i=\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k$$

$$=\sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_l b_m)$$

对k的作和可以利用式(1-2-19)算出，而对$a_l b_m$的求导按普通函数乘积求导法则计算：

$$[\text{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]_i=\sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}b_m+a_l\frac{\partial b_m}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_j b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}-b_i\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial x_j}+a_i\sum_j\frac{\partial b_j}{\partial x_j}-\sum_j a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

因此，

$$\text{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\text{grad})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\text{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\text{div}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\text{grad})\boldsymbol{b}.$$

这就是叉积的导数$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$展开的公式。

【例3】 计算$\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

解 按定义

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_j b_j\right) \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_j + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right). \qquad (1\text{-}6\text{-}15)
\end{aligned}
$$

此式右边不能直接用梯度，散度，旋度表出，需要用一点技巧。先算第一项，在其中插进两个δ符号，并利用一次式(1-2-19)：

$$
\begin{aligned}
\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_j &= \sum_{j l m} \delta_{i m} \delta_{j l} \frac{\partial a_l}{\partial x_m} b_j \\
&= \sum_{j l m} \delta_{i l} \delta_{j m} \frac{\partial a_l}{\partial x_m} b_j - \sum_{j k l m} \varepsilon_{i j k} \varepsilon_{k l m} \frac{\partial a_l}{\partial x_m} b_j \\
&= \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_{j k l m} \varepsilon_{i j k} b_j \varepsilon_{k m l} \frac{\partial}{\partial x_m} a_l \\
&= [(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}]_i .
\end{aligned}
$$

对式(1-6-15)右边第二项也类似地计算，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a} \\
&\quad + (\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}. \qquad (1\text{-}6\text{-}16)
\end{aligned}
$$

这就是点积的导数$\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$展开的公式。 ∎

以上这些公式用通常矢量分析方法推导相当困难。而用现在的方法推导很简单，而且没有含糊的地方。关键在于，这里将张量计算和求导运算分离开，前者利用δ符号和ε符号计算，而剩下的求导运算和通常微积分的计算相同。

第二章　仿射空间与伪欧氏空间中的张量

在上一章里讨论了三维（真）欧氏空间中的张量。这一章讨论仿射空间与伪欧氏空间中的张量。

伪欧氏空间具有和真欧氏空间不同的性质。它们是在仿射空间中引入不同的度规张量而得到的。伪欧氏空间又可以等效地表示为复欧氏空间。

在本章的第一节里，先从物理上说明为什么有必要改变空间的性质。然后再在以后几节里分别讨论仿射空间、伪欧氏空间和复欧氏空间中的张量。

§2-1　引言——改变空间性质的必要性

人们对于时间和空间的认识是逐步深入的。

假定在某一参考系[注]K中，质点的坐标是(x_1, x_2, x_3)而时间是t。另一参考系K'相对于K沿x_1方向以速度v运动。在K'中，上述质点的坐标是(x_1', x_2', x_3')，而时间是t'。根据初等的时空观念，应有

$$x_1' = x_1 - vt,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3, \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

$$t' = t \qquad (2\text{-}1\text{-}2)$$

〔注〕 在这一章中，谈到的参考系都是惯性系。凡是不加说明地用“坐标”这个词，就是指所考虑的参考系中三维几何空间的坐标。

这叫做伽利略变换。

在伽利略变换下，粒子的速度改变为

$$\frac{dx_1'}{dt'}=\frac{dx_1}{dt}-v,\quad \frac{dx_2'}{dt'}=\frac{dx_2}{dt},\quad \frac{dx_3'}{dt'}=\frac{dx_3}{dt},\tag{2-1-3}$$

而加速度不变：

$$\frac{d^2x_i'}{dt'^2}=\frac{d^2x_i}{dt^2}\qquad (i=1,2,3)。\tag{2-1-4}$$

在牛顿第二定律

$$F_i=m\frac{d^2x_i}{dt^2}\qquad (i=1,2,3)\tag{2-1-5}$$

中，只包含加速度而不包含速度，因此，在伽利略变换下，牛顿定律的形式不变。

牛顿运动定律成立的参考系叫**惯性系**。相对于一个惯性系作匀速运动的参考系也是惯性系。按照经典时空观，不同惯性系之间的变换是伽利略变换。由于在伽利略变换下，牛顿定律的形式不变，所以无法用力学实验区分不同的惯性系。这叫做**伽利略相对性原理**。伽利略相对性原理排除了利用力学实验确定在不同的惯性系中哪一个是绝对静止系的可能性。

但是，在电磁运动规律——麦克斯威方程组中，包含有电磁波的传播速度（即光速）c。如果伽利略变换式(2-1-1)、(2-1-2)能适用，则在参考系K'和K中的光速之间应有关系式(2-1-3)〔为简单起见，假定电磁波沿第一轴传播〕：

$$c'=c-v。\tag{2-1-6}$$

这样，麦克斯威方程在K'和K中就有不同形式。因此，应

该有可能利用电磁学（光学）实验来判断不同惯性系中哪一个是“静止系”。

然而，实验表明，作出这样的判断是不可能的。这就是说，用电磁学（光学）实验也无法区分不同的惯性系。这叫做**爱因斯坦的狭义相对性原理。**

按照实验证实了的爱因斯坦狭义相对性原理，在一切参考系中，电磁波的传播速度（光速）都有相同数值：

$$c' = c, \tag{2-1-7}$$

而不象式(2-1-6)那样发生改变。然而式(2-1-6)是伽利略变换式(2-1-1)、(2-1-2)的结论。实验事实否定了式(2-1-6)，也就指出了伽利略变换的局限性。

伽利略变换是经典时空概念的基础。既然伽利略变换需要改变，就意味着经典时空观需要改变。在这一章里，我们从数学的角度说明，如何改变时空性质才能符合光速不变性原理。

§2-2 仿射空间中的张量

新的时空观要求将时间和空间结合，构成一个四维“空间”。这一四维空间和四维（真）欧氏空间之间的区别在于“矢量点积”的公式不同。因此，我们首先从欧氏空间中去掉点积的公式(1-4-2)，看看在空间概念中还剩下些什么。然后再在这一基础上增添新的矢量点积公式，从而得到所需要的新的空间。

一、仿射空间的定义

定义 在欧氏空间中去掉矢量点积以后得到的空间称为**仿射空间。**

在仿射空间中不存在矢量的点积，这样一来，欧氏空间的哪一些性质随之消失了呢？消失了的性质有：

1．两矢量的正交性

两矢量正交的条件是$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，既然不存在矢量的点积，也就不存在正交性。

2．矢量的长度

矢量的长度是$\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$，既然不存在矢量的点积，也就不存在$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$。

3．坐标变换的正交性

正交变换的定义是：保持矢量点积不变的变换。既然不存在矢量的点积，也就无所谓正交变换。

特别是，正交变换的性质式（1-3-21）〔或式(1-3-17)、(1-3-22)〕不能再用了；而我们记得，在研究欧氏空间中的张量时，这一性质是广为利用了的。因此，对于仿射空间中的张量，必须专门加以讨论。

以上是仿射空间不同于欧氏空间的地方。除此以外，在其他方面，仿射空间则有着和欧氏空间的许多共同点。例如，在仿射空间中还保留着：矢量的加法，它满足

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \tag{2-2-1}$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}); \tag{2-2-2}$$

以及数与矢量的乘法，它满足

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}, \tag{2-2-3}$$

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}, \tag{2-2-4}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}. \tag{2-2-5}$$

特别是，

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}, \tag{2-2-6}$$

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{2-2-7}$$

在式(2-2-3)中令$\alpha=1,\beta=-1$，得到

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=0, \tag{2-2-8}$$

$-\boldsymbol{x}$称为$\boldsymbol{x}$的逆矢量。

二、仿射空间中的坐标系及其变换

为了在仿射空间中建立坐标系，需要利用矢量线性相关和线性无关的概念。

定义 设有m个矢量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$，如果可以找到一组不是全部为零的数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=0, \tag{2-2-9}$$

则称$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$是**线性相关**的。反之，如果不存在这样一组不全为零的数，使式(2-2-9)成立，则称$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$**线性无关**。

定义 如果在一个仿射空间中可以找到n个线性无关的矢量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，而任何$n+1$个矢量都是线性相关的，则称这一仿射空间为$n$维仿射空间。

在n维仿射空间中任意选n个线性无关的矢量，把它们记作

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n, \tag{2-2-10}$$

并称它们为坐标基矢。在这一空间中的任意矢量$\boldsymbol{x}$必须和这一组基矢线性相关（否则空间至少是$n+1$维而不是n维）。这一线性关系可以写成

$$\alpha\boldsymbol{x}+\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n=0,$$

其中的系数$\alpha\neq0$，否则上式成为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$之间的一个线性关系式，与以上的假设矛盾。因此，可以改写上式为

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n.$$

将这一展开式的系数改写为

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha} = x^1,\ -\frac{\alpha_2}{\alpha} = x^2, \cdots,\ -\frac{\alpha_n}{\alpha} = x^n,$$

（注意，这里$x^1, x^2, \cdots, x^n$的$1, 2, \cdots, n$是上标，而不是方次），得到

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\boldsymbol{e}_i. \qquad (2\text{-}2\text{-}11)$$

这就是任意矢量$\boldsymbol{x}$用坐标基矢（2-2-10）的展开式。这里的一组数 $x^i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为矢量$\boldsymbol{x}$在仿射坐标系（2-2-10）中的逆变分量（“逆变”两字的含义见下面）。

如果在同一仿射空间中，另选一组 n 个线性无关的矢量

$$\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n'} \qquad (2\text{-}2\text{-}12)$$

作为新的坐标基矢，就构成一个新的仿射坐标系。将它们用老坐标基矢(2-2-10)展开，得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= A_{1'}^{1}\boldsymbol{e}_1 + A_{1'}^{2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + A_{1'}^{n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= A_{2'}^{1}\boldsymbol{e}_1 + A_{2'}^{2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + A_{2'}^{n}\boldsymbol{e}_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_{n'} &= A_{n'}^{1}\boldsymbol{e}_1 + A_{n'}^{2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + A_{n'}^{n}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}\right\}, \qquad (2\text{-}2\text{-}13)$$

或简写为

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^{i}\boldsymbol{e}_i \quad (i' = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2\text{-}2\text{-}14)$$

这就是新、老坐标基矢之间的变换公式。

我们来研究一下变换矩阵$A_{i'}^{i}$的性质。

应该注意，无论是老坐标基矢（2-2-10）还是新坐标基

矢（2-2-12），都不存在“正交”和“单位长度”的性质，唯一的只有“线性独立”性。这是研究变换矩阵$A_i^{i'}$性质的根据。

我们可以把式(2-2-13)中的$e_1, e_2, \cdots, e_n$看成n个独立变量，而$e_{1'}, e_{2'}, \cdots, e_{n'}$是它们的$n$个线性齐次函数.这$n$个线性齐次函数线性无关的条件是系数行列式不为零：

$$|A_i^{i'}| = \begin{vmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} \cdots A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} \cdots A_2^{n'} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} \cdots A_n^{n'} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2\text{-}2\text{-}15)$$

这就是仿射坐标系之间的变换矩阵$A_i^{i'}$所满足的唯一条件。

由于变换矩阵$A_i^{i'}$的行列式不等于零，所以存在逆矩阵$(A^{-1})_{i'}^{i}$。按定义，逆矩阵$(A^{-1})_{i'}^{i}$和矩阵$A_i^{i'}$，有关系：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} A_i^{j'} (A^{-1})_{i'}^{i} = \delta_{i'}^{j'} \\ \sum_{i'=1}^{n} (A^{-1})_{i'}^{i} A_j^{i'} = \delta_j^{i} \end{aligned}\right\}, \qquad (2\text{-}2\text{-}16)$$

其中符号δ_i^j的定义是：

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{当} i \neq j \\ 1 & \text{当} i = j. \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}17)$$

将式(2-2-14)中的哑标i改写为l，用$(A^{-1})_{i'}^{i}$乘左、右两边，对i作和，利用式(2-2-16)得到由$e_{i'}$变回到e_i的变换：

$$e_i = \sum_{i'=1}^{n} (A^{-1})_{i}^{i'} e_{i'} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2\text{-}2\text{-}18)$$

但是，必须特别注意，$A_i^{i'}$不再是正交矩阵，因而不存

在式(1-3-21)那样的$A^{-1}=\widetilde{A}$关系，即一般说来

$$(A^{-1})_i^{i'} \neq A_{i'}^i, \quad |A_{i'}^i| \neq \pm 1,$$

这是和欧氏空间中的变换矩阵$A_{i'i}$不同的地方。

三、逆变张量与共变张量

现在转入研究仿射空间中的张量。

我们从任意矢量的展开式(2-2-11)开始，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{e}_i .$$

在新坐标系中，同一矢量的展开式是

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i'=1}^{n} x^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} .$$

将式(2-2-18)代入式(2-2-11)，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x^i \left(\sum_{i'=1}^{n}(A^{-1})_i^{i'} \boldsymbol{e}_{i'}\right)$$

$$=\sum_{i'=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_i^{i'} x^i\right)\boldsymbol{e}_{i'}$$

和上式比较，得到

$$x^{i'}=\sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_i^{i'} x^i \quad (i'=1,2,\cdots,n). \qquad (2\text{-}2\text{-}19)$$

我们看到，矢量$\boldsymbol{x}$的分量x^i在发生坐标变换(2-2-14)时，用转置逆矩阵$(A^{-1})_i^{i'}$进行变换[注]。

〔注〕 在变换(2-2-14)中，$A_{i'}^i$的下标是矩阵的前一脚标，上标是后一脚标；而在变换(2-2-19)中，$(A^{-1})_i^{i'}$的上标是矩阵的前一脚标，而下标是后一脚标．这意味着已经进行了矩阵的转置．

定义 在n维仿射空间的任一坐标系中给出一组数x^i（$i=1,2,\cdots,n$）。如果当坐标基矢由矩阵$A^i_{i'}$变换时，这一组数由转置逆矩阵$(A^{-1})^{i'}_i$变换，则这一组数x^i构成一个一阶逆变张量。

在仿射空间中，除了可以定义逆变张量以外，还可以定义协变张量。我们来看一个例子。

设x^i为仿射空间中点的坐标，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 1 \tag{2-2-20}$$

是仿射空间中一个平面的方程〔比较(1-4-6)〕。当坐标变换时，由于x^i变成$x^{i'}$，a_i也必须相应地变成$a_{i'}$才能保持方程(2-2-20)的形式不变：

$$\sum_{i'=1}^{n} a_{i'} x^{i'} = 1. \tag{2-2-20$'$}$$

为了得到a_i的变换规律，先写出式(2-2-19)的逆变换。将式(2-2-19)中的哑标i改写为l，用$A^i_{i'}$乘两边，对i'作和，利用式(2-2-16)，得到

$$x^i = \sum_{i'=1}^{n} A^i_{i'} x^{i'}. \tag{2-2-21}$$

这就是式(2-2-19)的逆变换。

将式(2-2-21)代入式(2-2-20)，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} a_i A^i_{i'} x^{i'} = \sum_{i'=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^i_{i'}\right) x^{i'} = 1.$$

与式(2-2-20)$'$比较可见，

$$a_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^{i} a_{i}. \tag{2-2-22}$$

这说明，在坐标变换（2-2-14）下，a_i和坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$的变换规律相同。

定义 在n维仿射空间的任一坐标系中给出一组数，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果当坐标变换时，它们和坐标基矢有相同的变换规律，则这一组数a_i构成**一阶协变张量**。

我们看到，仿射空间中的张量有协变和逆变两种，这是和欧氏空间不同的地方。产生这一差别的原因在于，仿射空间中的变换矩阵不是正交矩阵。

一般的高阶张量可以类似地定义。

定义 在仿射空间的任意坐标系中给定一组数，

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu}, \tag{2-2-23}$$

它有ν个下标，μ个上标。如果当坐标变换时，每个下标独立地按坐标基矢的变换规律变，而每个上标独立地按坐标基矢变换矩阵的转置逆矩阵变：

$$a_{i_1' i_2' \cdots i_\nu'}^{j_1' j_2' \cdots j_\mu'} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_\nu \\ j_1 j_2 \cdots j_\mu}} A_{i_1'}^{i_1} \cdots A_{i_\nu'}^{i_\nu} (A^{-1})_{j_1}^{j_1'} \cdots (A^{-1})_{j_\mu}^{j_\mu'} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} \tag{2-2-24}$$

则称式(2-2-23)这一组数为ν阶协变、μ阶逆变的张量。

在这一定义中的仿射空间设为n维的，则所有的指标i_1，$i_2,\cdots,i_\nu$；$j_1,j_2,\cdots,j_\mu$都取从1到n的值。式(2-2-24)中的作和从1到n。

由定义可见，张量的下标都是协变指标，上标都是逆变指标，两者不能混淆。

四、张量运算

仿射空间中的张量运算和欧氏空间中的张量运算类似，但必须注意区分协变指标和逆变指标。

1．张量的加法

在进行张量加法时，两个张量的协变指标数和逆变指标数必须分别相等：

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} + b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu}. \tag{2-2-25}$$

2．张量的乘法

在进行张量乘法运算时，因子中的协变指标在乘积中也是协变指标，因子中的逆变指标在乘积中也是逆变指标：

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}}^{j_1 j_2 \cdots j_{m+\nu}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}^{j_1 j_2 \cdots j_m} b_{i_{\mu+1} i_{\mu+2} \cdots i_{\mu+\nu}}^{j_{m+1} j_{m+2} \cdots j_{m+\nu}}. \tag{2-2-26}$$

3．指标缩并

在指标缩并时，只能将一个上指标和一个下指标缩并，例如：

$$c_{i_1 i_3 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_{\mu-1}} = \sum_{l=1}^{n} a_{i_1 l i_3 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_{\mu-1} l}. \tag{2-2-27}$$

利用上、下指标的变换规律和式(2-2-16)不难证明，上式左边是一个$\nu-1$阶协变、$\mu-1$阶逆变的张量。

特别要注意，两个协变指标（或两个逆变指标）不能缩并。如果将两个同类指标“缩并”，所得到的结果不再按张量规律变换，因而没有任何意义。

可以证明，按式(2-2-17)定义的δ_i^j是一个一阶协变、一

阶逆变的张量；而按式(1-4-11)定义的δ_{ij}在仿射空间中不再是一个张量。仿射空间中的指标缩并运算可以看成是所给张量和δ^i_j相乘后再缩并的结果。

4．指标置换

只有同类型的两个指标才能置换，上指标和下指标不能置换。

五、由仿射空间到欧氏空间

在仿射空间中没有定义矢量的点积，也就没有矢量的长度，因此，仿射空间是没有度量的空间。在仿射空间的基础上加进矢量点积的定义，就得到一个有度量的空间。依赖于所给的不同的点积定义，可以得到本质上不同的空间。下面我们先说明，如何从仿射空间过渡到真欧氏空间。在下一节里再讨论伪欧氏空间。

在一个 n 维仿射空间中定义矢量的点积如下：

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^iy^j, \qquad (2\text{-}2\text{-}28)$$

其中

$$g_{ij}=\begin{cases}0 & \text{当}\ i\neq j\\ 1 & \text{当}\ i=j,\end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}29)$$

这样就使仿射空间变成了欧氏空间(注)。

欧氏空间中的坐标变换要求保持矢量点积的公式（2-2-28)不变，因而只能是正交变换：

$$(A^{-1})^{i'}_{i}=A^{i}_{i'}. \qquad (2\text{-}2\text{-}30)$$

〔注〕 广义地说，欧氏空间包括真欧氏空间和伪欧氏空间．但是，在本书中是在狭义的意义下使用“欧氏空间”这个词．凡是未加说明的“欧氏空间”都指真欧氏空间．

在正交变换下，按式(2-2-29)定义的g_{ij}是一个二阶张量，称为欧氏空间的**度规张量**。

由于有了度规张量，在欧氏空间中多了一种张量运算——**降指标**。对于一个逆变张量x^i，可以利用度规张量g_{ij}将它的上标降成下标：

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x^j. \qquad (2\text{-}2\text{-}31)$$

此式右边是张量的乘积与缩并，因而所得到的x_i是一个协变张量。

利用g_{ij}的定义式(2-2-29)，可以求出式(2-2-31)中对j的作和，得到

$$x_i = x^i. \qquad (2\text{-}2\text{-}32)$$

由此可见，在欧氏空间中，每一个逆变张量都对应有一个协变张量，而且各对应分量的数值相等。因此，在欧氏空间中没有必要区分协变和逆变、下标和上标。这正是我们在上一章中讨论欧氏空间时，能够只用下标而不用上标的原因。

§2-3　伪欧氏空间中的张量

一、伪欧氏空间的建立

我们已经看到，由实验确立的光速不变性迫使我们改变原有的时空观念。现在来看按照光速不变的要求，时空观念应如何改变。

考虑一个参考系

$$K(x^1, x^2, x^3, t)$$

和以速度v相对它运动的参考系

$$K'(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, t').$$

我们用这两个参考系研究下面这个物理过程：在某一时刻，从某一地点(A)发出一个光讯号，经过一段时间后传播到了另一地点(B)。

在参考系K中，这一过程是：在时刻t_A从位置(x_A^1, x_A^2, x_A^3)发出的光讯号，在时刻t_B传播到了另一位置(x_B^1, x_B^2, x_B^3)。由于光以速度c传播，所以〔注〕

$$(x_B^1-x_A^1)^2+(x_B^2-x_A^2)^2+(x_B^3-x_A^3)^2=c^2(t_B-t_A)^2. \tag{2-3-1}$$

根据同样的考虑，在坐标系K'中有

$$(x_B^{1\prime}-x_A^{1\prime})^2+(x_B^{2\prime}-x_A^{2\prime})^2+(x_B^{3\prime}-x_A^{3\prime})^2 = c^2(t_B'-t_A')^2. \tag{2-3-2}$$

以上二式中的c是同一个数，原因是光速不变。

如果坐标和时间按照伽利略变换式(2-1-1)、(2-1-2)变，则以上二式不可能同时满足。我们现在要根据以上二式能同时满足的要求来修改坐标和时间的变换公式。

为了形式上更对称，令

$$ct=x^0, \quad ct'=x^{0\prime}, \tag{2-3-3}$$

于是式(2-3-1)、(2-3-2)可以改写成

$$(x_B^1-x_A^1)^2+(x_B^2-x_A^2)^2+(x_B^3-x_A^3)^2-(x_B^0-x_A^0)^2=0, \tag{2-3-4}$$

$$(x_B^{1\prime}-x_A^{1\prime})^2+(x_B^{2\prime}-x_A^{2\prime})^2+(x_B^{3\prime}-x_A^{3\prime})^2 -(x_B^{0\prime}-x_A^{0\prime})^2=0. \tag{2-3-5}$$

修改后的坐标和时间的变换规律应该使这两个式子能同时得到满足。为此，只需要在两个参考系之间存在以下关系：

〔注〕 注意区分代表平方的上角2和代表逆变张量不同分量的上标1，2，3。

$$
\begin{aligned}
&(x_B^1-x_A^1)^2+(x_B^2-x_A^2)^2+(x_B^3-x_A^3)^2-(x_B^0-x_A^0)^2\\
&\quad=(x_B^{1\prime}-x_A^{1\prime})^2+(x_B^{2\prime}-x_A^{2\prime})^2+(x_B^{3\prime}-x_A^{3\prime})^2\\
&\qquad-(x_B^{0\prime}-x_A^{0\prime})^2\\
&\quad=ds^2. \qquad\qquad (2\text{-}3\text{-}6)
\end{aligned}
$$

式(2-3-6)表明，在惯性系之间变换时，空间坐标x^1，x^2，x^3和时间$x^0(=ct)$结合在一起进行变换。因此，可以将它们看成是一个四维"空间"矢量的四个分量。由式(2-3-6)可见，dx^1，dx^2，dx^3的平方和减去dx^0的平方在惯性系之间变换时保持不变。因此，可以将按式(2-3-6)定义的ds看成是四维空间中矢量的"长度"，称为**时空间隔**。

在这样一个四维空间中，矢量长度的平方不等于四个分量的平方和，而是等于1,2,3三个分量的平方和减去0分量的平方。这样的空间不是真欧氏空间。

利用如下定义的$g_{\alpha\beta}(\alpha=0,1,2,3;\ \beta=0,1,2,3)$〔注〕：

$$
g_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \text{当}\ \alpha\neq\beta\\ 1 & \text{当}\ \alpha=\beta=1,2,3\\ -1 & \text{当}\ \alpha=\beta=0,\end{cases} \qquad (2\text{-}3\text{-}7)
$$

来定义四维空间中矢量的点积

$$
x\cdot y=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad (2\text{-}3\text{-}8)
$$

明显写出来就是

$$
x\cdot y=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3-x^0y^0. \qquad (2\text{-}3\text{-}8)'
$$

〔注〕 在本章中，我们用拉丁字母i，j，k，l，m，n表示三维空间的指标，取值1，2，3；用希腊字母α，β，γ，μ，ν，ρ表示四维空间的指标，取值0，1，2，3．三维空间的矢量用黑体字母表示，而四维空间的矢量一般简单地用斜体字母表示．有时为了避免混淆，在表示四维矢量的字母下加波线．

这样，矢量长度的平方就是

$$x\cdot x=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^0)^2。$$

(2-3-9)

只要坐标变换时按此式定义的矢量长度不变，就得到式(2-3-6)，从而达到了光速不变的要求。

将按照式(2-3-7)、(2-3-8)定义的矢量点积加进仿射空间中，所得到的空间称为四维**伪欧氏空间**。

二、伪欧氏空间中的坐标基矢

四维伪欧氏空间中的坐标基矢是$\underset{\sim}{e}_{\alpha}(\alpha=0,1,2,3)$[注]。用它们展开矢量$\underset{\sim}{x}$和$\underset{\sim}{y}$，

$$\left.\begin{aligned}\underset{\sim}{x}&=\sum_{\alpha=0}^{3}x^{\alpha}\underset{\sim}{e}_{\alpha}\\ \underset{\sim}{y}&=\sum_{\beta=0}^{3}y^{\beta}\underset{\sim}{e}_{\beta}\end{aligned}\right\}。\tag{2-3-10}$$

计算$\underset{\sim}{x}$和$\underset{\sim}{y}$的点积：

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{y}=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}(\underset{\sim}{e}_{\alpha}\cdot\underset{\sim}{e}_{\beta})x^{\alpha}y^{\beta}。\tag{2-3-11}$$

和式(2-3-8)比较可见

$$g_{\alpha\beta}=\underset{\sim}{e}_{\alpha}\cdot\underset{\sim}{e}_{\beta}\quad(\alpha=0,1,2,3;\ \beta=0,1,2,3)。$$

(2-3-12)

由$g_{\alpha\beta}$的定义式(2-3-7)知道

〔注〕 这里，为了便于区分，在四维空间的矢量下加波线．

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{e}_\alpha\cdot\underset{\sim}{e}_\beta=0 \quad 当 \quad \alpha\neq\beta\\&\underset{\sim}{e}_1\cdot\underset{\sim}{e}_1=\underset{\sim}{e}_2\cdot\underset{\sim}{e}_2=\underset{\sim}{e}_3\cdot\underset{\sim}{e}_3=1\\&\underset{\sim}{e}_0\cdot\underset{\sim}{e}_0=-1\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}13)$$

第一个式子表明，不同的坐标基矢相互正交（在伪欧氏空间的意义下），后两个式子则表示这些基矢都是“单位矢量”。但是，必须注意，对应于时间轴的基矢$\underset{\sim}{e}_0$和自身的点积等于－1而不是＋1。这也就是说，$\underset{\sim}{e}_0$的“长度”$\sqrt{\underset{\sim}{e}_0\cdot\underset{\sim}{e}_0}$是虚单位$i$而不是实单位1。这是伪欧氏空间不同于真欧氏空间的地方。

三、伪欧氏空间中的张量

伪欧氏空间是在仿射空间的基础上建立起来的，所以伪欧氏空间中的张量具有仿射空间中的张量的一切性质。但是，由于补充了度量关系式(2-3-7)、(2-3-8)：

$$x\cdot y=\sum_{=0}^{3}\sum_{=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad (2\text{-}3\text{-}14)$$

$$g_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & 当 \quad \alpha\neq\beta\\1 & 当 \quad \alpha=\beta=1,2,3\\-1 & 当 \quad \alpha=\beta=0,\end{cases} \qquad (2\text{-}3\text{-}15)$$

所以又出现了一些仿射空间中所没有的新性质。

首先，让我们来证明，按式(2-3-15)〔即式(2-3-7)〕定义的$g_{\alpha\beta}$是一个张量。这是因为，四维空间中的坐标变换应该使得按式(2-3-14)定义的矢量点积是不变的量，即标量。但是，式(2-3-14)右边是两个一阶逆变张量x^α,x^β和$g_{\alpha\beta}$的

缩并，由此就知道$g_{\alpha\beta}$是一个二阶协变张量。它称为**协变度规张量**。

定义

$$
g^{\alpha\beta}=\begin{cases} 0 & 当\ \alpha\neq\beta \\ 1 & 当\ \alpha=\beta=1,2,3 \\ -1 & 当\ \alpha=\beta=0, \end{cases} \tag{2-3-16}
$$

则不难看到

$$
\sum_{\gamma=0}^{3} g_{\alpha\gamma}g^{\beta\gamma}=\delta_{\alpha}^{\beta}, \tag{2-3-17}
$$

其中δ_{α}^{β}按式(2-2-17)定义，

$$
\delta_{\alpha}^{\beta}=\begin{cases} 0 & 当\ \alpha\neq\beta \\ 1 & 当\ \alpha=\beta. \end{cases} \tag{2-3-18}
$$

我们知道，δ_{α}^{β}在仿射空间中是（因而在伪欧氏空间中也是）一阶逆变一阶协变的张量，而由式(2-3-17)可见，它可以由$g^{\beta\gamma}$和二阶协变张量$g_{\alpha\gamma}$缩并得到，由此知$g^{\alpha\beta}$是一个二阶逆变张量，称为**逆变度规张量**。

由于有了度规张量$g_{\alpha\beta}$和$g^{\alpha\beta}$，使得在伪欧氏空间中存在一种仿射空间中所没有的张量运算——**升降指标**运算。

以三阶逆变张量$a^{\alpha\beta\gamma}$为例，作度规张量$g_{\alpha\rho}$和$a^{\rho\beta\gamma}$的缩并。为了书写简单，以下我们采用一种通用的记法：**如果在某一项中有一个上指标和一个下指标相同，就意味着对于这一对指标从0到3作和。**这叫做**爱因斯坦约定**。利用这一记法，可以将$g_{\alpha\rho}$和$a^{\rho\beta\gamma}$的缩并写成：

$$\sum_{\rho=0}^{3} g_{\alpha\rho}a^{\rho\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\rho}a^{\rho\beta\gamma}. \qquad (2\text{-}3\text{-}19)$$

这样得到的是一阶协变二阶逆变的张量：

$$a_{\alpha}^{\cdot\,\beta\gamma} = g_{\alpha\rho}a^{\rho\beta\gamma}. \qquad (2\text{-}3\text{-}20)$$

在上标$\beta\gamma$前的小圆点表示这里有一个指标被降了下来。由式(2-3-15)，$g_{\alpha\rho}$是一个已知的张量，所以$a_{\alpha}^{\cdot\,\beta\gamma}$由原来的张量$a^{\alpha\beta\gamma}$完全确定。可以认为它们两者代表同一对象。

同样，也可以将$a^{\alpha\beta\gamma}$中的第二个上标降下来：

$$a^{\alpha\cdot}{}_{\beta}{}^{\cdot\gamma} = g_{\beta\rho}a^{\alpha\rho\gamma}. \qquad (2\text{-}3\text{-}21)$$

$a^{\alpha\cdot}{}_{\beta}{}^{\cdot\gamma}$和$a_{\alpha}^{\cdot\,\beta\gamma}$是两个不同的一阶协变、二阶逆变的张量，但是它们都和$a^{\alpha\beta\gamma}$一样，代表同一对象。

当然，也可以将$a^{\alpha\beta\gamma}$的第三个上标γ降下来，或将它的任意两个上标降下来，甚至将三个上标都降下来。这样得到的结果都和$a^{\alpha\beta\gamma}$代表同一对象。

将$a^{\alpha\beta\gamma}$的三个上标都降下来，得到三阶协变张量

$$a_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\rho}a^{\mu\nu\rho}. \qquad (2\text{-}3\text{-}22)$$

从$a_{\alpha\beta\gamma}$出发，上升指标也可以得到

$$a_{\alpha}^{\cdot\,\beta\gamma} = g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}a_{\alpha\mu\nu}, \qquad (2\text{-}3\text{-}23)$$

以及

$$a^{\alpha\cdot}{}_{\beta}{}^{\cdot\gamma} = g^{\alpha\mu}g^{\gamma\nu}a_{\mu\beta\nu}, \qquad (2\text{-}3\text{-}24)$$

$$a^{\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho}a_{\mu\nu\rho}, \qquad (2\text{-}3\text{-}25)$$

等等。

利用式(2-3-17)可以证明，式(2-3-20)和式(2-3-23)相同，式(2-3-21)和式(2-3-24)相同。由此可见，在伪欧氏空间中，张量的指标可以任意地上升和下降。因此，协变张量和逆变张量的区分没有实质性的意义。

【例1】 试求和一阶逆变张量x^α（$\alpha=0,1,2,3$）对应的协变张量.

解 利用度规张量$g_{\alpha\beta}$降指标:

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta}x^\beta. \tag{2-3-26}$$

根据式(2-3-15)，上式的明显形式是

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= g_{11}x^1 = x^1 \\ x_2 &= g_{22}x^2 = x^2 \\ x_3 &= g_{33}x^3 = x^3 \\ x_0 &= g_{00}x^0 = -x^0 \end{aligned}\right\}. \tag{2-3-27}$$

由此可见，协变张量x_α的空间分量（前三个分量）和逆变张量x^α的对应分量相等；而时间分量（第零分量）和逆变张量x^α的时间分量相差符号. ∎

注意，在真欧氏空间中，协变张量和逆变张量的对应分量全都相等〔见式(2-2-32)〕，因此协变张量和逆变张量完全没有区别. 在伪欧氏空间中，协变张量和逆变张量的对应分量并不全相等，见式(2-3-27)，因此需要区分协变张量和逆变张量. 但是，和仿射空间中不一样，这种区分没有实质性意义. 同一物理对象既可以用协变张量表示，又可以用逆变张量表示.

在式(2-3-14)〔即式(2-3-8)〕中，矢量的点积是用它的逆变分量写出的. 采用协变分量可以将矢量的点积改写成另外几种等效的形式:

$$\begin{aligned} x\cdot y &= g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = g^{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \\ &= x_\alpha y^\alpha = x^\alpha y_\alpha. \end{aligned} \tag{2-3-28}$$

四、伪欧氏空间中的坐标变换

伪欧氏空间中的坐标变换应该要使矢量点积的表达式(2-3-14)、(2-3-15)保持不变。

将式(2-3-14)、(2-3-15)和欧氏空间中矢量点积的公式(2-2-28)、(2-2-29)相比较可见，三个空间分量没有什么特殊性，特殊的只是时间分量。因此，为了简单起见，只考虑一个空间分量(x^1)和一个时间分量(x^0)组成的1+1维伪欧氏空间。在这一空间中的矢量是：

$$\underset{\sim}{x}=x^1\underset{\sim}{e}_1+x^0\underset{\sim}{e}_0,\ \underset{\sim}{y}=y^1\underset{\sim}{e}_1+y^0\underset{\sim}{e}_0;\qquad(2\text{-}3\text{-}29)$$

矢量点积的公式是

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{y}=x^1y^1-x^0y^0.\qquad(2\text{-}3\text{-}30)$$

为使此式成立，要求〔见式(2-3-13)〕：

$$\underset{\sim}{e}_1\cdot\underset{\sim}{e}_0=0,\ \underset{\sim}{e}_1\cdot\underset{\sim}{e}_1=1,\ \underset{\sim}{e}_0\cdot\underset{\sim}{e}_0=-1.\qquad(2\text{-}3\text{-}31)$$

现在变换到新坐标系$\underset{\sim}{e}_{1'}$，$\underset{\sim}{e}_{0'}$〔见式(2-2-13)〕：

$$\left.\begin{aligned}\underset{\sim}{e}_{1'}&=A^1_{1'}\underset{\sim}{e}_1+A^0_{1'}\underset{\sim}{e}_0\\ \underset{\sim}{e}_{0'}&=A^1_{0'}\underset{\sim}{e}_1+A^0_{0'}\underset{\sim}{e}_0\end{aligned}\right\}.\qquad(2\text{-}3\text{-}32)$$

为了保持矢量点积的形式不变，要求

$$\underset{\sim}{e}_{1'}\cdot\underset{\sim}{e}_{0'}=0,\ \underset{\sim}{e}_{1'}\cdot\underset{\sim}{e}_{1'}=1,\ \underset{\sim}{e}_{0'}\cdot\underset{\sim}{e}_{0'}=-1.$$

$$(2\text{-}3\text{-}33)$$

将式(2-3-32)代入，并利用(2-3-31)，得到

$$A^1_{1'}A^1_{0'}-A^0_{1'}A^0_{0'}=0,$$
$$(A^1_{1'})^2-(A^0_{1'})^2=1,$$
$$(A^1_{0'})^2-(A^0_{0'})^2=-1.$$

令$A^1_{1'}=a$，$A^0_{0'}=b$，代入第一式，得到

$$\frac{A_1^{0\prime}}{a}=\frac{A_0^{1\prime}}{b}.$$

令这一比值等于β，则有

$$A_1^{0\prime}=a\beta, A_0^{1\prime}=b\beta.$$

将此两式代入第二、三式，得到

$$a^2(1-\beta^2)=1,$$
$$b^2(1-\beta^2)=1,$$

因而

$$a=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}},\quad b=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}.$$

由此就有

$$\left.\begin{array}{ll} A_1^{1\prime}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, & A_1^{0\prime}=\dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \\ A_0^{1\prime}=\dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, & A_0^{0\prime}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right\}. \quad (2\text{-}3\text{-}34)$$

代入式(2-3-32)，得到

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{e}_{1'}=\dfrac{\underset{\sim}{e}_1+\beta\underset{\sim}{e}_0}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \\ \underset{\sim}{e}_{0'}=\dfrac{\beta\underset{\sim}{e}_1+\underset{\sim}{e}_0}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right\}. \quad (2\text{-}3\text{-}35)$$

在第二个式子中，根号前取负号表示时间轴反向，即时间反演；在第一个式子中，根号前取负号表示空间反演。

不考虑时间反演和空间反演，则式(2-3-35)的根号前应取正号，由此得到

$$\left.\begin{aligned}\underset{\sim}{e}_{1'}&=\frac{\underset{\sim}{e}_1+\beta\underset{\sim}{e}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\\\underset{\sim}{e}_{0'}&=\frac{\beta\underset{\sim}{e}_1+\underset{\sim}{e}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\}\tag{2-3-36}$$

这就是由光速不变的要求所得到的时间-空间 坐 标 变 换 公式。

二维矢量$\underset{\sim}{x}$的协变分量和坐标基矢同样地变换：

$$\left.\begin{aligned}x_{1'}&=\frac{x_1+\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\\x_{0'}&=\frac{\beta x_1+x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\}.\tag{2-3-37}$$

利用式(2-3-27)得到逆变分量的变换规律

$$\left.\begin{aligned}x^{1'}&=\frac{x^1-\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}\\x^{0'}&=\frac{x^0-\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\}.\tag{2-3-38}$$

再将式(2-3-3)

$$x^0=ct,\quad x^{0'}=ct'$$

代入，并写$x^1=x$，$x^{1'}=x'$，得到

$$\left.\begin{aligned}x'&=\frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}\\t'&=\frac{t-\beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\}.\tag{2-3-39}$$

这叫做洛仑兹变换。

为了确定常数β的意义，考虑一个固连在K'坐标系中$x'=0$处的物体，由式(2-3-39)的第一式知，在K系中当$t=0$时它位于$x=0$；而到时刻t，它的位置x满足

$$x-\beta ct=0,$$

因而它的运动速度是

$$v=\frac{x}{t}=\beta c.$$

由于这一物体固连在K'坐标系中，因而v就是K'相对于K的速度。由上式得到

$$\beta=\frac{v}{c}. \qquad (2\text{-}3\text{-}40)$$

§2-4 复欧氏空间

一、伪欧氏空间与复欧氏空间

以上讨论各种空间时，都假定张量的分量取实数值。这样的空间称为实空间——实真欧氏空间，实仿射空间和实伪欧氏空间。有时，允许张量的分量取复数值更为方便。

回顾前面讨论的伪欧氏空间。在这一空间中，时-空坐标x的逆变分量是

$$x^1=x, x^2=y, x^3=z, x^0=ct, \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

度规张量是

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}. \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

由于矢量的分量x^α取实值，所以是实空间；而由于度规张量中既有+1又有−1，所以是伪欧氏空间。因此这是一个实伪欧氏空间。

由式(2-4-1)、(2-4-2)可见，在这一空间中有

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{x}=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$$

$$=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^0)^2. \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

正是由于这四个平方项中三正一负，所以是伪欧氏空间而不是真欧氏空间。

如果能使式(2-4-3)变成平方和，就能得到一个真欧氏空间。为此，改写式(2-4-3)为

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{x}=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(ix^0)^2. \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

令

$$x^4=ix^0=ict, \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

则有

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{x}=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2, \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

这样，我们可以定义一个四维复欧氏空间〔注〕：

$$x^1=x, x^2=y, x^3=z, x^4=ict. \qquad (2\text{-}4\text{-}7)$$

按式(2-4-6)，这一空间的度规张量g_{ab}(a, $b=1, 2, 3, 4$)是

$$g_{ab}=\begin{cases}0 & \text{当 } a\neq b\\ 1 & \text{当 } a=b.\end{cases} \qquad (2\text{-}4\text{-}8)$$

和式(2-2-29)比较可见，这一空间是真欧氏空间，由于它的

〔注〕 在这一节里，我们用字母a, b, c, d表示复欧氏空间的指标，它们仅值为1,2,3,4.

分量中有复数，所以是复真欧氏空间，它和上节讨论的实伪欧氏空间式(2-4-1)、(2-4-2)等效。

由式(2-4-7)、(2-4-8)定义的复欧氏空间和实欧氏空间式(2-2-28)、(2-2-29)有相同的度规张量，因此，在这一空间中，张量的协变和逆变分量没有区别〔见式(2-2-32)〕。从这个意义上，用复欧氏空间计算比用伪欧氏空间计算较为方便。

二、复欧氏空间中的坐标转动与洛仑兹变换

考虑1＋1维的复欧氏空间

$$x^1 = x, \quad x^4 = \mathrm{i}ct, \tag{2-4-9}$$

其中的矢量点积按式(2-4-6)是：

$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x} = (x^1)^2 + (x^4)^2. \tag{2-4-10}$$

在这一复欧氏空间中进行坐标转动：

$$\left.\begin{aligned} x^{1\prime} &= x^1\cos\theta - x^4\sin\theta \\ x^{4\prime} &= x^1\sin\theta + x^4\cos\theta \end{aligned}\right\}, \tag{2-4-11}$$

则矢量点积的形式保持不变：

$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x} = (x^{1\prime})^2 + (x^{4\prime})^2. \tag{2-4-12}$$

将式(2-4-9)代入式(2-4-11)得到x和t的变换规律（用$c=1$的单位制）：

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\cos\theta)x + (-i\sin\theta)t \\ t' &= (-i\sin\theta)x + (\cos\theta)t \end{aligned}\right\}. \tag{2-4-13}$$

考虑一个固连在K'系中$x'=0$处的物体，由式(2-4-13)知，当$t=0$时它位于$x=0$，而在t时刻，它的位置x满足

$$(\cos\theta)x + (-i\sin\theta)t = 0,$$

因而，K'系相对于K系的速度是

$$v=\frac{x}{t}=i\tan\theta. \tag{2-4-14}$$

由此式可见，式(2-4-13)是相互作匀速运动的坐标系之间的变换，即洛仑兹变换。同时，由此式又可见，$\tan\theta$是纯虚数而不是实数，因而复欧氏空间中的“转动”式(2-4-11)只是形式上和普通实欧氏空间中的转动相同，实际上并不一样。因为它的“转动角度”θ是虚数而不是实数。

我们知道，虚宗量的三角函数和双曲函数之间有关系：

$$-i\tan(iy)=\mathrm{th}\,y.$$

令$\theta=-iy$，则式(2-4-14)成为

$$v=\mathrm{th}\,y \tag{2-4-15}$$

由此式定义的y是实参数，称为**快度**。利用公式

$$\mathrm{ch}\,y=\cos(iy),\quad \mathrm{sh}\,y=-i\sin(iy), \tag{2-4-16}$$

可将洛仑兹变换式(2-4-13)用快度表出为

$$\left.\begin{aligned}x'&=(\mathrm{ch}\,y)x-(\mathrm{sh}\,y)t\\ t'&=-(\mathrm{sh}\,y)x+(\mathrm{ch}\,y)t\end{aligned}\right\}. \tag{2-4-17}$$

利用双曲函数的公式和式(2-4-15)，有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{ch}\,y&=\frac{1}{\mathrm{sech}\,y}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\\ \mathrm{sh}\,y&=\mathrm{ch}\,y\,\mathrm{th}\,y=\frac{\mathrm{th}\,y}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2y}}=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\end{aligned}\right\} \tag{2-4-18}$$

代入式(2-4-17)就回到了式(2-3-39)(在$c=1$的单位制中)。

由式(2-4-15)可以解出快度y〔注〕：

$$y=\operatorname{arcth}v=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \qquad (2-4-19)$$

由此可见，快度是表征运动速度的一个参量。

用快度y表征运动速度的好处是，在相继进行两次洛仑兹变换时，快度简单地相加。如果K_1相对于K有速度v_1(快度y_1)，K_2相对于K_1有速度v_2（快度y_2），则K_2相对于K的速度$v\neq v_1+v_2$，可是相应的快度

$$y=y_1+y_2. \qquad (2-4-20)$$

这可以从iy是“转动角度”直接看出，因为两次转动的总转动角应等于两个转动角之和。从式(2-4-18)出发，利用双曲函数的公式也不难证明这一论断。

将式(2-4-20)代入式(2-4-15)，得到

$$v=\operatorname{th}(y_1+y_2)=\frac{\operatorname{th}y_1+\operatorname{th}y_2}{1+\operatorname{th}y_1\operatorname{th}y_2}$$

再用式(2-4-15)，得到

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2} \qquad (2-4-21)$$

这是相对论的速度合成公式（在$c=1$的单位制中）。

三、几个例子

我们来举几个四维空间张量的例子。

【例1】 试写出四维电流密度矢量和电荷守恒律。

解 用ρ表示电荷密度，$\boldsymbol{v}$表示电荷运动的速度，则三

〔注〕 式(2-4-19)的第二等式不难利用双曲函数的定义

$$v=\operatorname{th}y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$

得到证明.

维电流密度矢量是

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v},$$

或写成分量形式

$$j_i=\rho\frac{dx_i}{dt}\quad(i=1,2,3).$$

采用复欧氏空间，将它扩展到四维，得到

$$J_a=\rho\frac{dx_a}{dt}\quad(a=1,2,3,4).\qquad(2\text{-}4\text{-}22)$$

具体写出就是：

$$J=\rho\frac{d\boldsymbol{x}}{dt},\ j_4=\mathrm{i}c\rho.\qquad(2\text{-}4\text{-}23)$$

因此，j_x，j_y，j_z，$\mathrm{i}c\rho$ 构成一个四维矢量，称为**四维电流密度矢量**。

采用实伪欧氏空间，则四维电流密度矢量的逆变分量是

$$j^1=j_x,j^2=j_y,j^3=j_z,j^0=c\rho.\qquad(2\text{-}4\text{-}24)$$

将电荷守恒定律的微分形式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

写成四维形式就是

$$\sum_{a=1}^{4}\frac{\partial j_a}{\partial x_a}=0,\qquad(2\text{-}4\text{-}25)$$

或

$$\sum_{a=0}^{4}\frac{\partial j^a}{\partial x^a}=0.\qquad(2\text{-}4\text{-}26)$$

这两种四维形式完全等效。

【例3】 四维欧氏空间中的完全反对称赝张量是四阶张量。类似于式(1-5-9)、(1-5-10)，定义ε_{abcd}为对四个指标都反对称的张量，并且

$$\varepsilon_{1234}=1. \tag{2-4-27}$$

可以证明，这样定义的ε_{abcd}是一个四阶赝张量。 ∎

【例4】 将三维磁场强度张量式(1-5-22)扩展到四维，得到四维电磁场强张量

$$(F_{ab})=\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-4-28}$$

其中的H_1,H_2,H_3是磁场强度$\boldsymbol{H}$的三个分量，而E_1，E_2，E_3是电场强度$\boldsymbol{E}$的三个分量。在二阶张量F_{ab}中，一个指标是4而另一个指标是1,2,3的分量是纯虚数。这是四维复欧氏空间的特点。 ∎

【例5】 电磁场的运动方程写成四维形式是

$$\varepsilon_{abcd}\frac{\partial}{\partial x_b}F_{cd}=0 \quad (a=1,2,3,4), \tag{2-4-29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}F_{ab}=\frac{4\pi}{c}j_a \quad (a=1,2,3,4). \tag{2-4-30}$$

在以上二式中隐含对重复的指标由1到4作和。试写出这两个方程中所包含的三维方程。

解 先看式(2-4-29)。当$a=4$时，$b,c,d=1,2,3$，此式成为（略去整体的常数因子，下同）：

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_3}+\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H_2}{\partial x_2}=0$$

或

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \tag{2-4-31}$$

当$a=3$时，$b,c,d=1,2,4$,式(2-4-29)成为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0.$$

将式(2-4-28)和式(2-4-7)代入，经过整理得到

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t}.$$

对于$a=1,2$,得到类似的式子，合并得到

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{2-4-32}$$

再来看式(2-4-30)。当$a=1$时，有

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}=\frac{4\pi}{c}j_1$$

或

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2}-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}-\frac{\partial E_1}{c\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_1$$

和$a=2,3$的类似式子合并，得到

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{2-4-33}$$

当$a=4$时，式(2-4-30)是

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}=\frac{4\pi}{c}j_4,$$

或

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho. \tag{2-4-34}$$

式(2-4-31)—(2-4-34)就是三维形式的麦克斯威方程组。

第三章　曲线坐标

以上两章中讨论的仿射空间和由它得到的真、伪欧氏空间都是**平直空间**。在这种空间中存在以直线和平面为坐标线和坐标面的坐标系，称为**仿射坐标系**。但是，在平直空间中也可以有以曲线和曲面为坐标线和坐标面的坐标系，称为**曲线坐标系**，例如球坐标系和柱坐标系。在所研究的对象具有特殊对称性的情况下，采用曲线坐标系往往更为方便。在这一章里讨论平直空间中的曲线坐标系。

在物理学中也常常需要讨论弯曲空间，在这种空间里不存在仿射坐标系，所能有的只是曲线坐标系。这一章讨论平直空间中曲线坐标的性质也就为下一章中研究弯曲空间打下了基础。

§3-1　局部标架

为了具体起见，先考虑三维欧氏空间。拉丁字母i, j, k, …和希腊字母α, β, γ, …都取由1到3的值。

一、曲线坐标

在三维欧氏空间的一个连通区域Ω中给定一个直角坐标系$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1, 2, 3)$。区域Ω中的任一点M在这一坐标系中的分量用大写字母X_i $(i=1, 2, 3)$表示。

设有X_i的三个连续可微的单值函数

$$x_\alpha = x_\alpha(X_1, X_2, X_3) \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{3-1-1}$$

它的反函数

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3-1-2}$$

假定也单值连续可微，则$x_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$可以代替$X_i(i = 1, 2, 3)$作为$\Omega$中的点的坐标，称为**曲线坐标**。

【例1】 令

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \\
x_2 &= \arccos \frac{X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi \\
x_3 &= \arccos \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \begin{cases} 0 \leqslant x_3 \leqslant \pi & \text{当 } X_2 \geqslant 0 \\ \pi < x_3 < 2\pi & \text{当 } X_2 < 0 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{3-1-3}$$

其中的根号都取正值。反过来，

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= x_1 \sin x_2 \cos x_3 \\
X_2 &= x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\
X_3 &= x_1 \cos x_2
\end{aligned}\right\} \tag{3-1-4}$$

$$0 \leqslant x_1 < \infty, 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi, 0 \leqslant x_3 < 2\pi, \tag{3-1-5}$$

则除了在$x_1 = 0(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$一点外，式(3-1-3)、(3-1-4)都是单值连续可微的函数，因而(x_1, x_2, x_3)形成曲线坐标。习惯上写

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi, \tag{3-1-6}$$

称为**球坐标**。

【例2】 令

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{X_1^2+X_2^2} \\
x_2 &= \arccos\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\quad \begin{cases} 0\leqslant x_2\leqslant\pi & \text{当 } X_2\geqslant 0 \\ \pi< x_2<2\pi & \text{当 } X_2<0 \end{cases} \\
x_3 &= X_3
\end{aligned}\right\},
\tag{3-1-7}
$$

其中的根号都取正值。反过来，

$$
\left.\begin{aligned}
X_1 &= x_1\cos x_2 \\
X_2 &= x_1\sin x_2 \\
X_3 &= x_3
\end{aligned}\right\},
\tag{3-1-8}
$$

$$
0\leqslant x_1<\infty,\ 0\leqslant x_2<2\pi,\ -\infty<x_3<\infty \tag{3-1-9}
$$

则除了$x_1=0(X_1=X_2=0)$一根直线外，式(3-1-7)、(3-1-8)都是单值连续可微的函数。因而(x_1,x_2,x_3)形成曲线坐标。习惯上写

$$
x_1=\rho,\ x_2=\varphi,\ x_3=z, \tag{3-1-10}
$$

称为**柱坐标**。 ▌

由式(3-1-2)知，X_i是x_α的函数，而由式(3-1-1)，x_α又是X_j的函数。根据复合函数求导法则，可以求X_i对X_j的导数

$$
\frac{\partial X_i}{\partial X_j}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_j}.
$$

但是，X_i对X_j的导数在$i=j$时为1，在$i\neq j$时为0，因而

$$
\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_j}=\delta_{ij}. \tag{3-1-11}
$$

同理，利用式(3-1-1)、(3-1-2)计算x_α对x_β的导数，可得

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad (3\text{-}1\text{-}12)$$

二、局部标架

在直角坐标系中，坐标线和坐标面是一些相互垂直的直线和平面。坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$既是沿坐标线X_i在X_i增加方向上的单位矢量，又是垂直于"等X_i面"的单位矢量，如图3-1。它们是三个大小和方向都不变的常矢量，满足正交单位条件

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \qquad (3\text{-}1\text{-}13)$$

曲线坐标的定义式(3-1-2)可写为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3), \qquad (3\text{-}1\text{-}14)$$

其中$\boldsymbol{x}$是空间点的矢径。在此式中，令某一个x_α改变，其余两个x_β $(\beta \neq \alpha)$保持不变，所得到的点的集合形成一根曲线，称为**坐标线**x_α。另一方面，如果固定x_α而让x_β $(\beta \neq \alpha)$变，则得到一个曲面，称为**坐标面**——等x_α面。对于曲线坐标，坐标线和坐标面一般说来是曲线和曲面。

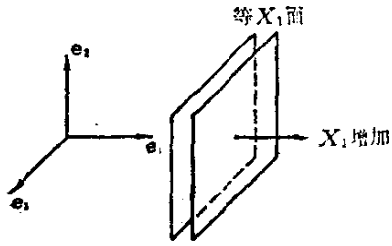
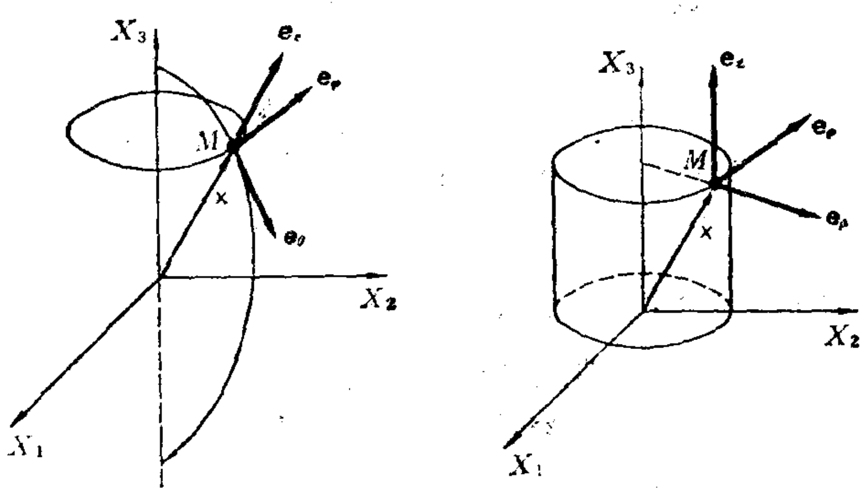


图3-1 直角坐标基矢与坐标线、坐标面的关系

考虑空间的任一点M，其矢径为$\boldsymbol{x}$。在这一点和坐标线x_α相切并指向x_α增加方向的单位矢量用$\boldsymbol{e}_\alpha$表示。三个$\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$形成一组坐标基矢，它们在空间不同点有不同方向，因此，称由它们组成的坐标系为**局部标架**。图3-2中以球坐标和柱坐标为例画出了点M（矢径为$\boldsymbol{x}$）的局部标架。

如果在空间的每一点M，局部标架的基矢$\boldsymbol{e}_\alpha(M)$都相互



(a)球坐标系中的局部标架　　(b)柱坐标系中的局部标架

图3-2

正交

$$\boldsymbol{e}_\alpha(M)\cdot\boldsymbol{e}_\beta(M)=\delta_{\alpha\beta}, \qquad (3\text{-}1\text{-}15)$$

则称这一曲线坐标为**正交曲线坐标**。球坐标和柱坐标都是正交曲线坐标，见图3-2。

三、拉梅系数

对式(3-1-14)求微分，得到

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}dx_\alpha. \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

如果只有一个x_α增加($dx_\alpha>0$)，而另两个保持不变($dx_\beta=0$当$\beta\neq\alpha$)，则矢量$d\boldsymbol{x}$沿坐标线x_α的切线，指向x_α增加的方向。此时，式(3-1-16)右边的和式中只剩下含($\partial\boldsymbol{x}/\partial x_\alpha$)的一项。由此可见，$\partial\boldsymbol{x}/\partial x_\alpha$是沿坐标线$x_\alpha$的切线指向$x_\alpha$增加方向的一个矢量。但是，这一方向上的单位矢量是$\boldsymbol{e}_\alpha$，因而有

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}=H_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \quad (\text{对}\alpha\text{不作和}). \qquad (3\text{-}1\text{-}17)$$

H_α称为**拉梅系数**，它等于上式左边矢量的模：

$$H_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\right)^2}. \qquad (3\text{-}1\text{-}18)$$

另一方面，由式(3-1-1)可知，x_α是$\boldsymbol{x}$的函数。可以把$x_\alpha(\boldsymbol{x})$看成标量场，它的梯度是指向“等x_α面”的正法线方向的矢量。对于正交曲线坐标，“等x_α面”的法线方向就是坐标线x_α的切线方向（参看图3-2）。因此，

$$\text{grad}\, x_\alpha \equiv \frac{\partial x_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}} = h_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \quad (\text{对}\alpha\text{不作和}). \qquad (3\text{-}1\text{-}19)$$

取式(3-1-17)和式(3-1-19)的点积，并利用式(3-1-15)和式(3-1-12)，得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}\cdot \text{grad} x_\beta = H_\alpha h_\beta \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial X_i} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{对}\alpha,\beta\text{不作和}).$$

上式中上、下两行的右边在$\alpha \neq \beta$时是恒等式(零=零)，而在$\alpha=\beta$时成为

$$H_\alpha h_\alpha = 1 \quad (\text{对}\alpha\text{不作和}),$$

或

$$h_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}. \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

【例3】 求球坐标的拉梅系数。

解 采用习惯的符号式(3-1-6)，则式(3-1-4)成为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=r\sin\theta\cos\varphi\\x_2&=r\sin\theta\sin\varphi\\x_3&=r\cos\theta\end{aligned}\right\}. \qquad (3\text{-}1\text{-}21)$$

代入式(3-1-18)，不难得到

$$H_r=1,\ H_\theta=r,\ H_\varphi=r\sin\theta. \qquad (3\text{-}1\text{-}22)$$

这就是球坐标的拉梅系数。

四、体积元

将矢径的微分$d\boldsymbol{x}$按曲线坐标中的局部标架$\boldsymbol{e}_\alpha$展开，利用式(3-1-17)，得到：

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}dx_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{3}\boldsymbol{e}_\alpha H_\alpha dx_\alpha. \qquad (3\text{-}1\text{-}23)$$

因此，$d\boldsymbol{x}$在局部标架$\boldsymbol{e}_\alpha$中的分量是

$$(d\boldsymbol{x})_\alpha=H_\alpha dx_\alpha\quad(\text{对}\alpha\text{不作和}). \qquad (3\text{-}1\text{-}24)$$

例如，在球坐标中，根据式(3-1-22)有

$$(d\boldsymbol{x})_r=dr,\ (d\boldsymbol{x})_\theta=rd\theta,\ (d\boldsymbol{x})_\varphi=r\sin\theta d\varphi. \qquad (3\text{-}1\text{-}25)$$

在正交曲线坐标中，三个$\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2,3)$相互垂直，因而$(d\boldsymbol{x})_\alpha(\alpha=1,2,3)$形成一个长方体的三个边。这个长方体的体积$d\tau$是曲线坐标中的体积元：

$$d\tau=\prod_{\alpha=1}^{3}(d\boldsymbol{x})_\alpha=\prod_{\alpha=1}^{3}H_\alpha dx_\alpha. \qquad (3\text{-}1\text{-}26)$$

例如，球坐标中的体积元是式(3-1-25)中三个式子的连乘积：

$$d\tau=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \qquad (3\text{-}1\text{-}27)$$

五、梯度、散度和旋度

利用式(3-1-24)很容易得到标量场的梯度

$$\mathrm{grad}\varphi=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{H_{\alpha}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}\boldsymbol{e}_{\alpha}. \qquad (3\text{-}1\text{-}28)$$

矢量场的散度和旋度也可以利用拉梅系数写出，其结果是：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial x_1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial x_3}\right\}, \qquad (3\text{-}1\text{-}29)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{\alpha}}{H_{\beta}H_{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}(a_{\gamma}H_{\gamma})\right]. \qquad (3\text{-}1\text{-}30)$$

这两个公式的证明将在 § 3-4 中给出。

结合式(3-1-28)、(3-1-29)可以得到拉普拉斯算子

$$\Delta\equiv\mathrm{div\,grad} \qquad (3\text{-}1\text{-}31)$$

的表达式

$$\Delta=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right]. \qquad (3\text{-}1\text{-}32)$$

§ 3-2　曲线坐标中的张量

现在来考虑不同曲线坐标之间的变换性质。为了普遍起见，以下不局限于三维空间、也不局限于正交曲线坐标。

考虑 n 维欧氏空间。其中任一点的矢径 $\boldsymbol{x}$ 在直角坐标中的分量是 $X^1, X^2, \cdots, X^n$。仿照式(3-1-1)、(3-1-2)定义曲线坐标

$$x^a = x^a(X^1, X^2, \cdots, X^n) \quad (a = 1, 2, \cdots, n), \tag{3-2-1}$$

$$X^i = X^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{3-2-2}$$

但是，我们并不假定有式(3-1-15)型式的等式，即局部标架的基矢之间不一定相互正交，而且基矢的长度也不一定为1。然而，式(3-1-16)仍然成立，

$$d\boldsymbol{x} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_a} dx_a.$$

和前面同样地分析可以知道，$(\partial \boldsymbol{x}/\partial x_a)$是沿坐标线$x_a$的切线，指向$x_a$增加方向的矢量。因此，可以直接取

$$\boldsymbol{x}_a = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_a} \quad (a = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-2-3}$$

作为坐标基矢。由于坐标基矢没有正交性和单位长度性，"协变"和"逆变"不等同，因而在以下的讨论中有必要区分上、下指标。

一、坐标变换

给定曲线坐标$x^a\ (a = 1, 2, \cdots, n)$。由式(3-2-2)，有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x^1, x^2, \cdots, x^n). \tag{3-2-4}$$

设有连续可微的单值函数

$$x^{a'} = x^{a'}(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad (a' = 1, 2, \cdots, n), \tag{3-2-5}$$

它的反函数

$$x^a = x^a(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}) \quad (a = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-2-6}$$

也是连续可微的单值函数，则$x^{a'}\ (a' = 1, 2, \cdots, n)$也是一个曲线坐标。将式(3-2-6)代入式(3-2-4)，有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}). \tag{3-2-7}$$

在原曲线坐标x^{α}中，局部标架的基矢是$\boldsymbol{x}_{\alpha}$(3-2-3)；在新曲线坐标$x^{\alpha'}$中，局部标架的基矢是

$$\boldsymbol{x}_{\alpha'}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha'}} \quad (\alpha'=1,2,\cdots,n). \tag{3-2-8}$$

根据复合函数求导的法则，不难得到

$$\boldsymbol{x}_{\alpha'}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{x}_{\alpha}. \tag{3-2-9}$$

这就是曲线坐标局部标架基矢之间的变换法则。反之，有

$$\boldsymbol{x}_{\alpha}=\sum_{\alpha'=1}^{n}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\boldsymbol{x}_{\alpha'}. \tag{3-2-10}$$

将式(3-2-9)和式(2-2-14)比较可见，在曲线坐标的变换中，$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}$代替了仿射坐标变换中的$A^{i}_{i'}$。实际上，后者是前者的特例——当$x^{\alpha}$和$x^{\alpha'}$都是仿射坐标时，它们之间有线性关系，因而$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}$化为常数矩阵$A^{i}_{i'}$。

二、张量的定义和运算

在曲线坐标中张量的定义和仿射坐标中张量的定义式(2-2-24)形式上相同，只要作代换：

$$A^{i}_{i'}\longrightarrow\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}(M),\quad A^{j'}_{j}\longrightarrow\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}(M), \tag{3-2-11}$$

这里用宗量M标明$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}$和$\partial x^{\beta'}/\partial x^{\beta}$都是空间点的函数，而不是常数。

定义 在曲线坐标x^{α}中，在空间任一点M给出一组数

$$a^{\beta_1\cdots\beta_\mu}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}, \tag{3-2-12}$$

如果当曲线坐标变换时，它变为

$$a^{\beta'_1\cdots\beta'_\mu}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_\nu}=\sum_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_\nu\\ \beta_1\cdots\beta_\mu}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_\nu}}{\partial x^{\alpha'_\nu}}\frac{\partial x^{\beta'_1}}{\partial x^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta'_\mu}}{\partial x^{\beta_\mu}}a^{\beta_1\cdots\beta_\mu}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}, \tag{3-2-13}$$

（式中所有的量都取M点的值，对所有指标的作和都是从1到n）．则称这一组数为在M点的一个ν阶协变、μ阶逆变的张量。

张量的代数运算可以仿照式（2-2-25）—（2-2-27）来定义。但是，张量场的微分运算比较复杂，留到下两节中讨论。

三、度规张量

在本节中，到此为止还没有用到空间的度量性质，因此一切讨论都适用于仿射空间。往下，要用到欧氏空间（包括真欧氏空间和伪欧氏空间）的度量性质，引进度规张量。

任意两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$按曲线坐标中的标架基矢$\boldsymbol{x}_\alpha$(3-2-3)展开为

$$\boldsymbol{a}=\sum_\alpha a^\alpha\boldsymbol{x}_\alpha,\quad \boldsymbol{b}=\sum_\alpha b^\alpha\boldsymbol{x}_\alpha.$$

取两者的点积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}_\beta)a^\alpha b^\beta. \tag{3-2-14}$$

定义度规张量为

$$g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{x}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}_\beta\equiv\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^\beta}, \tag{3-2-15}$$

则矢量点积的公式(3-2-14)成为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta. \tag{3-2-16}$$

由此式可见，$g_{\alpha\beta}$是二阶协变张量。

还可以定义二阶逆变度规张量：

$$g^{\alpha\beta}=\sum_i\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial X^i}. \tag{3-2-17}$$

利用式(3-1-11)、(3-1-12)，可以证明

$$\sum_\beta g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta_\alpha^\gamma. \tag{3-2-18}$$

在曲线坐标中，$g_{\alpha\beta}$是$\boldsymbol{x}$的函数，可以看成是二阶张量场。一般说来，它是不对角的，但是在正交曲线坐标中$g_{\alpha\beta}$对角。为了看到这一点，将式(3-1-17)代入式(3-2-15)，得到正交曲线坐标中的协变度规张量：

$$g_{\alpha\beta}=H_\alpha H_\beta\delta_{\alpha\beta}=H_\alpha^2\delta_{\alpha\beta}\text{（对}\alpha,\beta\text{不作和）}. \tag{3-2-19}$$

将式(3-1-19)、(3-1-20)代入式(3-2-17)，得到正交曲线坐标中的逆变度规张量：

$$g^{\alpha\beta}=\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\delta_{\alpha\beta}=\frac{1}{H_\alpha^2}\delta_{\alpha\beta}\quad\text{（对}\alpha,\beta\text{不作和）}. \tag{3-2-20}$$

如果讨论的是平直的仿射坐标系、则$(\partial\boldsymbol{x}/\partial x^\alpha)=\boldsymbol{e}_\alpha$是常矢量〔见式(2-2-11)〕，因而按式(3-2-15)定义的$g_{\alpha\beta}$是常数张量：

$$g_{\alpha\beta}\text{是常数张量}\quad\text{（对于仿射坐标系）}. \tag{3-2-21}$$

对于斜交坐标系，$g_{\alpha\beta}$不是对角的，但总可以通过坐标变换变到坐标基矢为单位矢量的直角坐标系，使$g_{\alpha\beta}$对角，而且其对角元为±1。

四、弧长与体积

考虑矢径$\boldsymbol{x}$的微分

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}\ dx^{\alpha}=\sum_{\alpha}((c'x^{\gamma})\boldsymbol{x}_{\alpha}. \qquad (3\text{-}2\text{-}22)$$

由此式可见，dx^{α}是矢量$d\boldsymbol{x}$在局部标架$\boldsymbol{x}_{\alpha}$中的分量。

$d\boldsymbol{x}$的长度是

$$|d\boldsymbol{x}|=\sqrt{d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}}. \qquad (3\text{-}2\text{-}23)$$

在一级近似下，它等于弧长的微分ds，因而

$$(ds)^{2}=\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}. \qquad (3\text{-}2\text{-}24)$$

再来看区域D的体积V_D。在直角坐标中，我们有

$$V_D=\int_D dX^1dX^2\cdots dX^n. \qquad (3\text{-}2\text{-}25)$$

按式(3-2-1)、(3-2-2)作变量代换，得到：

$$V_D=\int_D J\,dx^1dx^2\cdots dx^n, \qquad (3\text{-}2\text{-}26)$$

其中的变换雅可比J是矩阵$\partial X^i/\partial x^{\alpha}$的行列式的绝对值：

$$J=\left|\det\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}\right|. \qquad (3\text{-}2\text{-}27)$$

将式(3-2-15)改写为

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}}=\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta}}.$$

它可以看成是两个矩阵

$$B_{\alpha i}\equiv\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}},\quad C_{i\beta}\equiv\frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta}}$$

的矩阵积。这两个矩阵的行列式相等：

$$\det B_{\alpha i} = \det C_{i\beta} = \det \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha},$$

因而，$g_{\alpha\beta}$的行列式

$$g \equiv \det g_{\alpha\beta} \tag{3-2-28}$$

等于

$$g = \left(\det \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} \right)^2. \tag{3-2-29}$$

这样，由式(3-2-26)得到

$$V_D = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^n. \tag{3-2-30}$$

§3-3 平行移动与联络

在上一节里，我们在空间的任一点M，给出了曲线坐标中张量的定义，如式(3-2-13)。现在来讨论在空间的不同点，按这种方式定义的张量之间的关系。

在三维欧氏空间的直角坐标系中给定一个矢量$\boldsymbol{a}$的三个分量a_i $(i=1,2,3)$就完全确定了这个矢量。在空间任一点，用这三个分量可以作出这同一个矢量，其原因是直角坐标的基矢$\boldsymbol{e}_i$是三个常矢量，与空间点无关。

在曲线坐标中则不然。坐标基矢$\boldsymbol{e}_\alpha$依赖于空间点M。因此，在空间的不同点，同样的三个分量a^α决定不同的矢量。反之，如果在空间某一点M给定了一个矢量$\boldsymbol{a}$的三个分量a^α，则将这一矢量平行移动到另一点N，它的分量将要变化。当矢量平行移动时，它在曲线坐标中的分量如何变化？这就是我们所要讨论的问题。

这一节里将假定所考虑的是n维空间。在第一、二点中

是 n 维仿射空间，而在第三点中是 n 维欧氏空间（包括真欧氏空间和伪欧氏空间）。

一、矢量的平行移动

将一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 按 M 点的局部标架展开：

$$\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha} a^{\alpha}(M)\boldsymbol{x}_{\alpha}(M)=\sum_{\alpha} a^{\alpha}(M)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}(M).$$

我们来讨论如何将 $\boldsymbol{a}$ 由 $M(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 移动到 $N(x^1+dx^1, x^2+dx^2,\cdots,x^n+dx^n)$，要求在此过程中，保持 $\boldsymbol{a}$ 不变。这一要求意味着 $d\boldsymbol{a}=0$，因而

$$0=\sum_{\alpha}(da^{\alpha})\boldsymbol{x}_{\alpha}+\sum_{\alpha} a^{\alpha} d\boldsymbol{x}_{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha}(da^{\alpha})\boldsymbol{x}_{\alpha}+\sum_{\alpha\beta} a^{\alpha}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}dx^{\beta}.$$

将上式右边第二项中的哑标改写为 $\beta\gamma$，这一项中包含的

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}$$

是在点 M 的一个矢量（对于固定的 β、γ），因而可以将它用 M 点的局部标架 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 展开

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}=\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}. \tag{3-3-1}$$

代入上式，得到

$$\sum_{\alpha}(da^{\alpha})\boldsymbol{x}_{\alpha}=-\sum_{\alpha}\Big(\sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}dx^{\gamma}\Big)\boldsymbol{x}_{\alpha}.$$

由于三个基矢 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 相互独立，所以它们的系数应分别相等。因而有

$$da^{\alpha}=-\sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}dx^{\gamma}. \tag{3-3-2}$$

这就是决定矢量平行移动时其分量的变化的公式。

由式(3-3-1)定义的$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$称为**联络**。式(3-3-2)表明，$da^{\alpha}$线性地依赖于$a^{\beta}$和$dx^{\gamma}$。这一线性关系中的系数就是联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$。

由定义式(3-3-1)可见，$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$对指标$\beta\gamma$对称：

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}. \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

注意，只是在曲线坐标中，联络才不为零。如果是仿射坐标〔见式(2-2-11)〕，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}=\boldsymbol{e}_{\alpha}$$

是常矢量，它对x^{β}的导数为零，因而按式(3-3-1)定义的联络为

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=0. \qquad \text{(对于仿射坐标)} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

二、联络的变换规律

联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$是有三个指标的量，共有$3^3=27$个分量。但是，联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$并不是一个三阶张量，因为它在坐标变换时不按张量规律变。

我们来研究联络的变换规律。

在坐标系$x^{\alpha'}$中，类似于式(3-3-1)有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}=\sum_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\boldsymbol{x}_{\alpha'}. \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

将式(3-2-9)

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma'}}=\sum_{\gamma}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}}$$

对$x^{\beta'}$求导，得到

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}=$$

$$\sum_{\gamma}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\boldsymbol{x}_{\gamma}+\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}},$$

将右边第一项中的哑标γ改写为α，代入式(3-3-5)并利用式(3-3-1)和式(3-2-10)，得到

$$\sum_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\boldsymbol{x}_{\alpha'}=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right]\boldsymbol{x}_{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha'}\left\{\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}\boldsymbol{x}_{\alpha'}$$

令两边$\boldsymbol{x}_{\alpha'}$的系数相等，得到

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$+\sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}. \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

这就是联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$在坐标变换时的变换规则。

式(3-3-6)右边第二项正好是逆变张量指标α和协变张量指标$\beta\gamma$的变换规则，然而还多出了第一项。这表明联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$和张量有不同的变换规则，因而它不是一个张量。

三、克利斯托菲符号

在本节的讨论中，直到现在为止，还没有用到欧氏空间的性质。现在假定所研究的是欧氏空间（包括真欧氏空间和

伪欧氏空间）中的曲线坐标，此时有度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 可供利用。

我们来讨论联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$和度规张量$g_{\alpha\beta}$的关系。将

$$x_{\lambda}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}$$

点乘式(3-3-1)

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}=\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}_{\lambda}$$

按式(3-2-15)，$\boldsymbol{x}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}_{\lambda}=g_{\alpha\lambda}$。定义

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\sum_{\alpha}g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\tag{3-3-7}$$

则上式成为

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}.\tag{3-3-8}$$

由式(3-3-7)可见，$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$可以看成是将$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$的上标下降的结果。反之，将$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$的第一个下标上升，又可以回到$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$：

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}.\tag{3-3-9}$$

这里用了度规张量的性质(3-2-18)。

为了进一步求出$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$与度规张量的关系，将度规张量的定义式(3-2-15)

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}}=g_{\lambda\gamma}$$

对x^{β}求导，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}=\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}.$$

将式(3-3-8)代入，得到

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}+\Gamma_{\gamma,\lambda\beta}=\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}. \tag{3-3-10}$$

将三个指标进行轮换$\lambda\to\beta\to\gamma\to\lambda$，得到又一方程

$$\Gamma_{\beta,\gamma\lambda}+\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}}. \tag{3-3-11}$$

再轮换一次，得到第三个方程：

$$\Gamma_{\gamma,\lambda\beta}+\Gamma_{\beta,\gamma\lambda}=\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{3-3-12}$$

这是三个未知量$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$，$\Gamma_{\gamma,\lambda\beta}$，$\Gamma_{\beta,\gamma\lambda}$的三个联立方程。将式(3-3-10)加上式(3-3-11)减去式(3-3-12)后用2除，可以得到

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right). \tag{3-3-13}$$

此式右方的表达式称为第一类克利斯托菲符号。

将式(3-3-13)代入式(3-3-9)，得到

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right). \tag{3-3-14}$$

此式右方的表达式称为第二类克利斯托菲符号。这两个式子建立了联络与度规张量的关系。

在正交曲线坐标中，度规张量对角。将式(3-2-19)、(3-2-20)代入式(3-3-13)、(3-3-14)，得到：

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H^{2}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\delta_{\lambda\gamma}+\frac{\partial H^{2}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\delta_{\lambda\beta}-\frac{\partial H^{2}_{\gamma}}{\partial x^{\lambda}}\delta_{\gamma\beta}\right),$$

（对β、γ不作和）　　(3-3-15)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\frac{1}{H^2_\alpha}\left(\frac{\partial H^2_\gamma}{\partial x^\beta}\delta_{\alpha\gamma}+\frac{\partial H^2_\beta}{\partial x^\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial H^2_\gamma}{\partial x^\alpha}\delta_{\gamma\beta}\right).$$

（对α、β不作和）　　(3-3-16)

§3-4　协变导数

在上两节里讨论了曲线坐标中的常矢量．现在来考虑矢量场．在直角坐标系中，矢量场（即一阶张量场）对坐标的导数是二阶张量场，如式(1-6-1)；而在曲线坐标中，由于坐标基矢不是常矢量，单纯对坐标求导，不能形成张量．我们的任务是要寻找一种能形成张量的"求导"运算．

一、一阶协变张量场的协变导数

考虑一个矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，它的协变分量是$a_\alpha(x^1,x^2,\cdots,x^n)$．当坐标变换时，$a_\alpha$变为

$$a_{\alpha'}=\sum_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}a_\alpha. \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

将它对$x^{\beta'}$求导

$$\frac{\partial a_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}=\sum_\alpha\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^{\beta'}}+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}a_\alpha\right)$$

$$=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}+\sum_\alpha\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}a_\alpha.$$

(3-4-2)

由于右边多出了第二项，所以$\partial a_\alpha/\partial x^\beta$不是二阶张量．

式(3-4-2)右边第二项是老坐标对新坐标的二阶导数．为了计算它，利用式(3-3-6)：

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\sum_\lambda\frac{\partial^2x^\lambda}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda}+$$

$$+\sum_{\lambda\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}.$$

用$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}$乘左、右两边，对$\alpha'$作和，注意到

$$\sum_{\alpha'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}=\delta^{\alpha}_{\lambda}$$

就得到

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}=\sum_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}-\sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}.$$

(3-4-3)

将式(3-4-2)中的自由指标α'改写为γ'，并将右边第一项中的哑标α改写为γ，得到

$$\frac{\partial a_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}=\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}+\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}a_{\alpha}$$

将式(3-4-3)代入上式，得到

$$\frac{\partial a_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}=\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}+\sum_{\alpha\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}a_{\alpha}$$
$$-\sum_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a_{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}. \qquad (3-4-4)$$

根据式(3-4-1)，

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}a_{\alpha}=a_{\alpha'}.$$

将此式代入式(3-4-4)得到

$$\frac{\partial a_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}-\sum_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}a_{\alpha'}=\left(\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a_{\alpha}\right)\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}$$

(3-4-5)

由此可见，具有两个自由下标$\beta\gamma$的表达式

$$\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\sum_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a_\alpha=\sum_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta^\alpha_\gamma-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right)a_\alpha \qquad (3\text{-}4\text{-}6)$$

服从二阶协变张量的变换规律。我们称它为协变张量场a_α的协变导数，记为

$$\nabla_\beta a_\gamma=\sum_\alpha(\nabla_\beta)^\alpha_\gamma a_\alpha=\sum_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta^\alpha_\gamma-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right)a_\alpha. \qquad (3\text{-}4\text{-}7)$$

我们看到，为了使求导运算成为一种协变运算，需要将求导算符$\partial/\partial x^\beta$换成"协变导数"算符$\nabla_\beta$。算符$\nabla_\beta$有两个附加指标$\alpha$和$\gamma$，可以把它们看成是矩阵指标，当$\nabla_\beta$作用到$a_\alpha$上时，这两个指标按照矩阵乘法规则对指标$\alpha$缩并。这样，由普通导数向协变导数的过渡可写为：

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xrightarrow{\text{作用在协变张量场上}}(\nabla_\beta)^\alpha_\gamma\equiv\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta^\alpha_\gamma-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}. \qquad (3\text{-}4\text{-}8)$$

二、一阶逆变张量场的协变导数

考虑逆变张量场$a^\alpha(M)$。为了得到它的协变导数，最简单的办法是取它和一个协变张量场$b_\alpha(M)$的缩并：

$$\varphi(M)=\sum_\gamma a^\gamma(M)b_\gamma(M).$$

这是一个标量场，它对x^β的导数是一阶协变张量场 由上式得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}=\sum_\gamma a^\gamma\frac{\partial b_\gamma}{\partial x^\beta}+\sum_\gamma\frac{\partial a^\gamma}{\partial x^\beta}b_\gamma.$$

上式左边是一阶协变张量，而右边两项都不是张量。我们来改写这个式子，使右边两项都具有张量的性质。为此，参考

式(3-4-6)左边第二项的形式写出恒等式

$$-\sum_{\alpha\gamma}a^{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}b_{\alpha}+\sum_{\alpha\gamma}b_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}=0.$$

此式左边的两项只不过是哑标的符号不同，因而相减为零。将它加到上式右方，得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}=\sum_{\gamma}a^{\gamma}\left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}b_{\alpha}\right)$$

$$+\sum_{\gamma}b_{\gamma}\left(\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\right).$$

此式的左边和右边第一项都是一阶协变张量，因而右边第二项也是一阶协变张量。然而，这一项是括号中的表达式

$$\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\right)a^{\alpha}\qquad(3\text{-}4\text{-}9)$$

和一阶协变张量b_{γ}缩并的结果，因而式(3-4-9)是一个一阶协变一阶逆变的张量。它就是所要求的逆变张量场$a^{\alpha}(M)$的协变导数，记为

$$\sum_{\alpha}(\nabla_{\beta})^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\right)a^{\alpha}.\qquad(3\text{-}4\text{-}10)$$

因此，当作用到逆变张量场上的时候，由普通导数向协变导数的过渡是：

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\xrightarrow{\text{作用在逆变张量场上}}(\nabla_{\beta})^{\gamma}_{\alpha}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}+\boldsymbol{\Gamma}_{\beta\alpha}.\qquad(3\text{-}4\text{-}11)$$

三、高阶张量的协变导数

协变导数的运算可以推广到任意的高阶张量场。以一阶协变一阶逆变的张量场$a^{\lambda}_{\gamma}(M)$为例，它的协变导数是

$$\nabla_\beta a^\lambda_\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\beta} a^\lambda_\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} a^\lambda_\alpha + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} a^\alpha_\gamma. \qquad (3-4-12)$$

四、里契引理

本节前面的讨论没有用到空间的度量性质，因而适用于仿射空间的任意曲线坐标。假定所考虑的是欧氏空间（包括真欧氏空间和伪欧氏空间），则有度规张量$g_{\alpha\beta}$，它也是空间点的函数，可以看成二阶协变张量场。我们来计算它的协变导数：

$$\nabla_\beta g_{\gamma\gamma'} = \frac{\partial g_{\gamma\gamma'}}{\partial x^\beta} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma'} - \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma'} g_{\gamma\alpha}.$$

(3-4-13)

将联络与度规张量之间的关系式(3-3-14)代入式(3-4-13)，得到：

$$\begin{aligned}\nabla_\beta g_{\gamma\gamma'} = {} & \frac{\partial g_{\gamma\gamma'}}{\partial x^\beta} \\ & - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\lambda} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\lambda}\right) g_{\alpha\gamma'} \\ & - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\lambda} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma'}} - \frac{\partial g_{\gamma'\beta}}{\partial x^\lambda}\right) g_{\gamma\alpha}.\end{aligned}$$

利用式(3-2-18)不难看到，上式右边各项全部消去得零。即：度规张量的协变导数为零

$$\nabla_\beta g_{\gamma\gamma'} = 0 \qquad (3-4-14)$$

这叫做里契引理。

五、协变微分

通常，一个函数对自变量的导数乘上自变量的微分就得到这一函数的微分。在曲线坐标中，一个张量场对坐标的协

变导数乘上坐标的微分就称为这一张量场的协变微分。

例如，在式(3-4-7)上乘以dx^β对β作和，得到协变张量场a_γ的协变微分

$$Da_\gamma=\sum_{\alpha\beta}(\nabla_\beta)^\alpha_\gamma a_\alpha dx$$

$$=\sum_\beta\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}dx^\beta-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a_\alpha dx^\beta. \quad (3-4-15)$$

在式(3-4-10)上乘以dx^β对β作和，得到逆变张量场a^γ的协变微分

$$Da^\gamma=\sum_{\alpha\beta}(\nabla_\beta)^\gamma_\alpha a^\alpha dx^\beta$$

$$=\sum_\beta\frac{\partial a^\gamma}{\partial x^\beta}dx^\beta+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}a^\alpha dx^\beta. \quad (3-4-16)$$

式(3-4-15)和式(3-4-16)右边第一个和式分别是通常的全微分

$$da_\gamma=\sum_\beta\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}dx^\beta,\quad da^\gamma=\sum_\beta\frac{\partial a^\gamma}{\partial x^\beta}dx^\beta, \quad (3-4-17)$$

因而，协变微分和全微分的关系是：

$$Da_\gamma=da_\gamma-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a_\alpha dx^\beta, \quad (3-4-18)$$

$$Da^\gamma=da^\gamma+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}a^\alpha dx^\beta. \quad (3-4-19)$$

比较式(3-4-19)、(3-3-2)，并注意到联络对两个下指标的对称性，可以看到，矢量平行移动的条件是它的协变微分等于零。

从这里可以看出协变微分的意义。在曲线坐标中移动一

个矢量，它的分量会发生变化，但这一变化不能反映矢量的真实改变，因为由于局部标架基矢的变化也会引起矢量分量的变化。从矢量分量的变化中扣除由于标架基矢的变化所引起的部分才是矢量的真实改变，而这就是矢量的协变微分。如果协变微分等于零，就表示移动过程中矢量没有变化，即平行移动。

六、矢量场的散度和旋度

现在将本节的结果应用到三维真欧氏空间的正交曲线坐标中，来推导散度和旋度的公式(3-1-29)、(3-1-30)。

回忆在§1-6中用笛卡尔坐标计算矢量场的散度和旋度，是先求这一矢量场的导数，得到一个二阶张量场；然后再通过指标的缩并，得到标量场（散度）和赝矢量场（旋度）。要想将这一方法推广应用到曲线坐标中，需要用协变导数代替普通导数。

按照式(3-4-10)，矢量场a的协变导数

$$\sum_{\alpha}(\nabla_{\beta})^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}$$

是一阶协变一阶逆变的张量。将它的两个指标缩并，得到一个标量场，就是矢量场a的散度：

$$\text{div}\ a=\sum_{\alpha\gamma}(\nabla_{\gamma})^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}=\sum_{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}a^{\alpha}\right).\quad(3\text{-}4\text{-}20)$$

和笛卡尔坐标中散度的公式相比，多出了以联络为系数的第二项。

按照式(3-3-14)，联络$\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$可以用度规张量$g_{\alpha\beta}$表出。在正交曲线坐标系中，按照式(3-3-16)，有

$$\sum_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}=\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{H_{\gamma}^{2}}\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\alpha}}=\sum_{\gamma}\frac{1}{H_{\gamma}}\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}. \qquad (3\text{-}4\text{-}21)$$

将上式代入式(3-4-20)，可以得到div $\boldsymbol{a}$。但是，还应注意，式(3-4-20)右方的a^{α}是矢量$\boldsymbol{a}$在基矢$\boldsymbol{x}_{\alpha}$构成的标架中的分量，而在正交曲线坐标中计算div$\boldsymbol{a}$时，习惯于用$\boldsymbol{a}$在归一化基矢$\boldsymbol{e}_{\alpha}$所构成的标架中的分量$\overline{a}^{\alpha}$：

$$\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha}a^{\alpha}\boldsymbol{x}_{\alpha}=\sum_{\alpha}\overline{a}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}. \qquad (3\text{-}4\text{-}22)$$

将式(3-1-17)代入上式，得到

$$a^{\alpha}=\frac{1}{H_{\alpha}}\overline{a}^{\alpha} \quad (\text{对}\alpha\text{不作和}). \qquad (3\text{-}4\text{-}23)$$

将式(3-4-21)、(3-4-23)代入式(3-4-20)，得到

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\overline{a}^{\alpha}}{H_{\alpha}}+\sum_{\alpha\gamma}\frac{1}{H_{\alpha}H_{\gamma}}\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\overline{a}^{\alpha}. \qquad (3\text{-}4\text{-}24)$$

经过简单的运算，不难将这个式子化成式(3-1-29)的形式。

在往下计算矢量场的旋度之前，先让我们注意一个事实。在曲线坐标中，二阶对称符号$\delta_{\alpha\beta}$不是一个二阶张量，但是，如果是正交曲线坐标，则

$$H_{\alpha}H_{\beta}\delta_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta} \quad (\text{对}\alpha、\beta\text{不作和}) \qquad (3\text{-}4\text{-}25)$$

和

$$\frac{1}{H_{\alpha}H_{\beta}}\delta_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta} \quad (\text{对}\alpha、\beta\text{不作和}) \qquad (3\text{-}4\text{-}26)$$

分别是二阶协变张量和二阶逆变张量〔见式(3-2-19)、(3-2-20)〕。

同样的道理，三阶完全反对称符号$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$在曲线坐标中也

不是张量；但是，在正交曲线坐标中

$$\delta_{\alpha\beta\gamma}=H_\alpha H_\beta H_\gamma\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\quad(\text{对}\alpha、\beta、\gamma\text{不作和})\qquad(3\text{-}4\text{-}27)$$

和

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\quad(\text{对}\alpha、\beta、\gamma\text{不作和})\qquad(3\text{-}4\text{-}28)$$

分别是三阶协变张量和三阶逆变张量。为了证明这一结论，将式(3-4-26)和式(3-4-27)作缩并，利用式(1-5-12)，得到

$$g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}g^{\gamma\gamma'}\delta_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\alpha'\beta'\gamma'}=\delta^{\alpha\alpha'}\delta^{\beta\beta'}\delta^{\gamma\gamma'}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

$$=\sum_{\alpha\beta\gamma}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})^2=6.$$

这一缩并的结果是标量，说明$\delta_{\alpha\beta\gamma}$是三阶协变张量。

利用式(3-4-28)和协变导数式(3-4-7)缩并，可以得到一个赝矢量场，称为$\boldsymbol{a}$的旋度rot$\boldsymbol{a}$：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_\alpha\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\sum_\lambda\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}a_\lambda\right)$$

$$=\sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_\alpha\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\sum_\lambda\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}a_\lambda\right).$$

由于$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$对指标$\beta\gamma$反对称，而$\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}$对$\beta\gamma$对称，它们相乘以后对$\beta\gamma$作和得零。因而上式括号中只剩下第一项。注意，代表矢量分量的是一阶张量的逆变分量而不是协变分量，因而第一项中的a_γ应该升指标。于是有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma\lambda}\frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g_{\gamma\lambda}a^\lambda).$$

(3-4-29)

将式(3-1-17)、(3-4-23)、(3-4-25)代入上式，得到(3-1-30)。

第四章　黎曼空间中的张量

这一章讨论弯曲空间，重点考虑有度量的弯曲空间——黎曼空间。

弯曲空间的最简单例子是三维欧氏空间中的曲线和曲面，它们分别是一维和二维弯曲空间。在近代物理学中，弯曲空间有重要的应用。按照广义相对论，有引力场存在的时空是四维弯曲空间——四维伪黎曼空间。基本粒子内部对称性的空间也是一种弯曲空间。

在本章第一节里，我们给出黎曼空间和仿射联络空间的定义；第二节讨论平行移动和曲率张量；第三节讨论弯曲空间中的短程线——测地线；第四节简单说明几个物理应用的例子。

为了简化书写，在本章中我们采用约定：凡是在一项中有相同的上、下指标就隐含对这一指标从1到n作和（n是空间的维数）。

§4-1　黎曼空间与仿射联络空间

考虑一个n维弯曲空间。由于空间是弯曲的，所以在其中不可能建立以直线为坐标线、以平面为坐标面的仿射坐标系，而只能建立曲线坐标系。既然一切坐标系都是曲线坐标系，以下就省去“曲线”两个字，而直接称它们为“坐标系”。

一、流形中的张量

我们从最一般的情况开始。假定研究一种几何对象，在它里面可以建立以 n 个实数为分量的坐标系 $x^{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,n)$．并且通过双方单值的连续可微函数可以变换到另外的坐标系 $x^{\alpha'}$ $(\alpha'=1,2,\cdots,n)$：

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'}&=x^{\alpha'}(x^1,x^2,\cdots,x^n) \quad (\alpha'=1,2,\cdots,n) \\ x^{\alpha}&=x^{\alpha}(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'}) \quad (\alpha=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{4-1-1}$$

所有这些坐标系完全等效，对它们没有任何优先的选择。

如果所讨论的对象仅仅只有上述性质，它的几何结构就非常贫乏。唯一的几何性质是可以建立坐标系，而且可以用连续可微的单值函数(4-1-1)进行坐标变换，除此以外没有任何其他几何性质。这种非常不定型的几何对象称为**流形**(注)。

在流形中，可以按照式(3-2-12)、(3-2-13)的方式定义张量：

定义 在流形上的任一点$M(x^{\alpha}；\alpha=1,2,\cdots,n)$给出一组数

$$a^{\beta_1\cdots\beta_\mu}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}, \tag{4-1-2}$$

如果当坐标按式(4-1-1)变换时，它变为

$$a^{\beta'_1\cdots\beta'_\mu}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_\nu}=\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_\nu}}{\partial x^{\alpha'_\nu}}\frac{\partial x^{\beta'_1}}{\partial x^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta'_\mu}}{\partial x^{\beta_\mu}}a^{\beta_1\cdots\beta_\mu}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}, \tag{4-1-3}$$

〔注〕 能在整体上建立统一坐标系的流形是仿等流形．对于一般的流形，不能在整体上建立统一的坐标系，而只能分区建立坐标系，再用适当的方式将它们粘合起来．

则称这一组数为在M点的一个ν阶协变、μ阶逆变的张量（注意，按约定，上式右方隐含对指标α_1，…，α_ν，β_1，…，β_μ从1到n作和）。

同一点上的张量可以按通常的方式(2-2-25)—(2-2-27)进行代数运算。

但是，由于流形中既没有度规张量，又没有联络，所以流形中的张量不具有度量性质，而且不同点的张量之间没有任何联系。因此，对于流形中的张量不能进行求导运算，也不能升、降指标。

二、黎曼空间

如果在n维流形中给定一个不退化的对称二阶协变张量场

$$g_{\alpha\beta}(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

来作为**度规张量**，则这一流形就成为**黎曼空间**。

所谓"非退化"是说$g_{\alpha\beta}$的行列式不等于零：

$$\det g_{\alpha\beta}\neq 0 \quad ; \tag{4-1-4}$$

而所谓"对称"是指对指标α、β对称：

$$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha} \quad . \tag{4-1-5}$$

如果二阶逆变张量场

$$g^{\alpha\beta}(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

是对称的

$$g^{\alpha\beta}=g^{\beta\alpha} \quad , \tag{4-1-6}$$

并且满足

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}=\delta^\beta_\gamma, \tag{4-1-7}$$

则称$g^{\alpha\beta}$为**逆变度规张量**。

利用度规张量可以定义矢量的标积[注]。矢量a^{α}和b^{β}的标积定义为它们和度规张量$g_{\alpha\beta}$的缩并

$$a\cdot b=g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}\quad. \tag{4-1-8}$$

利用度规张量$g_{\alpha\beta}$和$g^{\alpha\beta}$可以用类似于式(2-3-19)—式(2-3-25)的方式将张量指标上升或下降。因此，在黎曼空间中，张量的协变和逆变指标的区分没有实质意义。

利用度规张量还可以定义黎曼空间中的弧长。在黎曼空间中的曲线可以用参数方程表示为

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{4-1-9}$$

当参数t改变dt时，$x^{\alpha}(t)$改变dx^{α}，由$x^{\alpha}(t)$决定的点扫过曲线上的一段弧。这一段弧长的平方在略去高级小量的情况下等于以$g_{\alpha\beta}$为系数的二次型：

$$ds^{2}=g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}. \tag{4-1-10}$$

这一个二次型可能是正定的，也可能是非正定的。在前一情况下，称为**真黎曼空间**；而后一情况称为**伪黎曼空间**。对于真黎曼空间，弧长ds永远是实数；而对于伪黎曼空间，沿不同的曲线，弧长可以是实的，可以是虚的，也可以等于零。如果沿某一方向弧长为零，就称这一方向为**迷向**的方向。

三、仿射联络空间

对于一个流形，可以不规定它的度量性质，而规定不同

〔注〕 实际上，在弯曲空间中只有张量而没有矢量．但是，在弯曲空间的每一点，可以定义一个平直的切空间．这一个切空间中的矢量和弯曲空间这一点上的一阶逆变张量有一一对应关系．因此，可以简称弯曲空间中的一阶逆变张量为"矢量"．以下我们采用这种简化语言．

点的张量之间的联系。也就是说，可以不给定度规张量$g_{\alpha\beta}$，而给定联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$。

按定义，联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$是有三个指标的一组数，当坐标变换为式(4-1-1)时，它变为〔参看式(3-3-6)〕：

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{4-1-11}$$

在一个流形上，按这种方式给定联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$以后，这一流形就成为**仿射联络空间**。

注意，在上述定义中，并没有要求$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$对指标$\beta$、$\gamma$对称。定义

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{4-1-12}$$

为**挠率**。在一般仿射联络空间中挠率不为零。但是，在本书中，我们只讨论挠率为零的仿射联络空间，即只考虑$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$对$\beta$、$\gamma$对称：

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{4-1-13}$$

的情况。

在一般的流形中，不同点的矢量之间不存在"平行"的性质。但是，在有了联络以后，就可以定义平行移动。

定义 如果沿曲线（4-1-9）移动dx^{α}时，矢量a^{α}改变

$$da^{\alpha}=-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}dx^{\gamma}, \tag{4-1-14}$$

我们就说矢量a^{α}沿这一曲线平行移动〔参看式（3-3-2）〕。

平行移动应该是一个与坐标系的选择无关的几何性质。因此，如果在坐标系x^{α}中式(4-1-14)成立，则按式(4-1-1)变换到坐标系$x^{\alpha'}$后，和式(4-1-14)同样的式子也应当成立。我们来证明这一论断。

证 按张量的变换性质，

$$a^{\alpha}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}a^{\alpha'}. \qquad (4\text{-}1\text{-}15)$$

求此式的微分，利用式(4-1-14)，得到

$$\begin{aligned} da^{\alpha} &= -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}dx^{\gamma} \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}da^{\alpha'}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\gamma'}}a^{\alpha'}dx^{\gamma'}. \end{aligned}$$

在最后一项中将哑标 α' 改写为 β'，移项，并利用式(4-1-15)，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}da^{\alpha'} = -\Big\{&\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}a^{\beta'}dx^{\gamma'} \\ &+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}a^{\beta'}dx^{\gamma'}\Big\} \end{aligned}$$

将左边的哑标α'改写为λ'，然后在左、右两边同乘以$\partial x^{\alpha'}/\partial x^{\alpha}$并对$\alpha$作和；利用复合函数导数公式

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda'}}=\delta^{\alpha'}_{\lambda'},$$

得到

$$\begin{aligned} da^{\alpha'} = -\Big\{&\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \\ &+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Big\}a^{\beta'}dx^{\gamma'}. \end{aligned}$$

将联络的变换规则式(4-1-11)代入，得到

$$da^{\alpha'}=-\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}a^{\beta'}dx^{\gamma'}.$$

这就证明了平行移动与坐标系的选择无关。 ▮

从以上的证明可以看出，我们规定联络有变换性质式

(4-1-11)，就是为了保证平行移动与坐标系无关。

四、黎曼空间的联络

以上我们分别在流形中定义度规张量$g_{\alpha\beta}$和联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$，得到黎曼空间和仿射联络空间。这样得到的黎曼空间只有度量性质，没有平行移动性质，因而不同点的张量之间没有联系；而在这样得到的仿射联络空间中，虽然有平行移动性质，却没有度量性质。现在，我们进一步在黎曼空间中引进联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$，从而使得这一空间除了有度量性质以外，也有平行移动性质。

但是，在黎曼空间中，联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$的引进不是任意的。它和度规张量$g_{\alpha\beta}$之间有一定的关系。为了看到这一点，考虑两个矢量$a^{\alpha}$和$b^{\alpha}$。它们的标积是

$$a\cdot b=a^{\alpha}b_{\alpha}=g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}.$$

如果让这两个矢量同时沿某一曲线平行移动，它们的标积应保持不变，因而应该有

$$0=a^{\alpha}(db_{\alpha})+(da^{\alpha})b_{\alpha}$$

将式(4-1-14)代入，并交换哑标符号，得到

$$a^{\alpha}(db_{\alpha})=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}dx^{\gamma}b_{\alpha}=\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}b_{\beta}dx^{\gamma}a^{\alpha}$$

由于a^{α}是任意的，因而

$$db_{\alpha}=\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}b_{\beta}dx^{\gamma}. \tag{4-1-16}$$

这是协变张量b_{α}的平行移动公式〔比较式(3-4-13)〕。

另一方面，又可以写

$$db_{\alpha}=d(g_{\alpha\beta}b^{\beta})=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}b^{\beta}dx^{\gamma}+g_{\alpha\beta}db^{\beta}.$$

将式(4-1-14)、(4-1-16)代入，得到

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}b_{\lambda}dx^{\gamma}=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}g_{\lambda\beta}b^{\beta}dx^{\gamma}=$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} b^{\beta} dx^{\gamma} - g_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} b^{\beta} dx^{\gamma}.$$

这一式子对于任意的$b^{\beta}dx^{\gamma}$都应成立，因而有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - (g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} + g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}) = 0.$$

定义〔参看式(3-3-7)〕

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}, \tag{4-1-17}$$

就有〔比较式(3-3-10)〕

$$\Gamma_{\alpha,\gamma\beta} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \tag{4-1-18}$$

在写出这一式子时，利用了联络对β、γ的对称性（挠率为零），因而由式(4-1-17)有

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha,\gamma\beta}, \tag{4-1-19}$$

和§3-3中一样，对式(4-1-18)进行三个指标的轮换，可以得到类似的另两个式子

$$\Gamma_{\gamma,\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha,\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} \tag{4-1-20}$$

$$\Gamma_{\beta,\alpha\gamma} + \Gamma_{\gamma,\beta\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \tag{4-1-21}$$

由此可以解出〔参看式(3-3-13)〕

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{4-1-22}$$

即：$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$等于由度规张量组成的第一类克利斯托菲符号。

和式(3-3-14)同样，可以得到

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right). \tag{4-1-23}$$

即：$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$等于由度规张量组成的第二类克利斯托菲符号。

我们看到，在黎曼空间中，只能通过度规张量按式(4-1-22)、(4-1-23)方式引进联络。这种联络称为**黎曼联络**。

§4-2 平行移动对路径的依赖性 曲率张量

一、平行移动对路径的依赖性

将上一节的公式和第三章中的公式对比，不难看到它们的类似性。仿射联络空间中联络的变换性质式(4-1-11)和平行移动的定义式(4-1-14)，同仿射空间的曲线坐标中的相应公式(3-3-6)、(3-3-2)形式上完全相同；黎曼空间中的标积(4-1-8)和弧长(4-1-10)的公式，同欧氏空间的曲线坐标中的相应公式(3-2-16)、(3-2-24)形式上完全相同；而黎曼联络和度规张量之间的关系〔克利斯托菲符号式(4-1-22)、(4-1-23)〕,同欧氏空间的曲线坐标中的相应公式(3-3-13)、(3-3-14)在形式上也完全相同。很自然地会发生一个问题：怎样看到所研究的是弯曲的仿射联络空间和黎曼空间而不是平直的仿射空间和欧氏空间呢？在这一节里，我们要回答这个问题。

假定空间是平直的，就一定存在平直的仿射坐标系。在这种坐标系中，度规张量是常数张量而联络等于零（见式(3-2-21)、(3-3-4)）。即使首先给定的是曲线坐标，度规张量是张量场而联络不为零，也总可以通过坐标变换变到仿射坐标系，使度规张量变为常张量而联络变为零。可是，如果空间本身是弯曲的，则不存在平直的仿射坐标系，因而不可能找到一个坐标变换，使度规张量变为常张量而联络在整

个空间中变为零。这说明，仅仅是坐标弯曲而空间不弯曲，和空间本身弯曲在实质上是不同的。

我们的目的是要找到一个能判断空间是否弯曲和弯曲程度的量。从以上的讨论可见，仅仅从联络和平行移动、度规张量和弧长的公式，只能看出坐标的弯曲性，而不能判断空间是否弯曲。判断空间弯曲性的判据是**平行移动对路径的依赖性**。

假定所考虑的空间是平直的，将一个矢量从空间的某一点M平行移动到另一点N，所得到的结果是完全确定的，和所经过的路径无关。然而，如果空间是弯曲的，情况就不是这样，矢量平行移动的结果，不仅依赖于移动的起点和终点，而且与移动所经过的路径有关。举一个简单例子。在球面赤道上的一点M沿赤道线方向作一矢量 $\boldsymbol{a}(M)$。

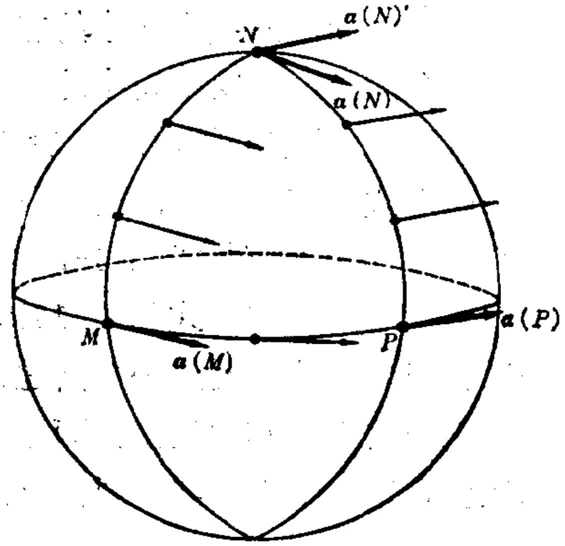


图4-1 球面上矢量的平行移动与路径有关

将这一矢量沿径线MN平行移动到北极N，得到$\boldsymbol{a}(N)$。如果将 $\boldsymbol{a}(M)$ 先沿赤道平行移动到另一点P，然后再沿径线 PN 平行移动到北极N，则将得到一个不同于 $\boldsymbol{a}(N)$ 的矢量 $\boldsymbol{a}(N)'$，如图4-1。这表明，将矢量 $\boldsymbol{a}(M)$ 由M点平行移动到N点的结果，与移动所经过的路径有关。这是弯曲空间的特征性质。

二、曲率张量的定义

为了定量地描述弯曲空间的上述特征性质，可以利用协变微分的工具。

在所研究的空间中选取一个二维曲面，它的参数方程是

$$x^a = x^a(u, v). \qquad (4-2-1)$$

固定v的值让u变化和固定u的值让v变化，得到这一曲面上的两个曲线族，如图4-2。当沿这两个曲线族中的曲线移动时，x^a的微分分别是

$$d_u x^a = \frac{\partial x^a}{\partial u} du, \quad d_v x^a = \frac{\partial x^a}{\partial v} dv. \qquad (4-2-2)$$

按照式(3-4-18)，协变张量场a_γ沿曲线族u和v中的曲线的协变微分分别是

$$D_u a_\gamma = d_u a_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} a_\lambda d_u x^\beta; \qquad (4-2-3)$$

$$D_v a_\gamma = d_v a_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} a_\lambda d_v x^\beta. \qquad (4-2-4)$$

现在让a_γ沿u方向移动，然后再沿v方向移动，这样得到二阶微分$D_v D_u a_\gamma$，如图4-2。反过来，先沿v移动，再沿u移动，得到二阶微分$D_u D_v a_\gamma$。如果是平直空间，这两个方向的移动可对易，因而按不同次序进行的二阶微分相等，而在弯曲空间中，这两个二阶微分不相等，它们的差标志了空间弯曲的程度。

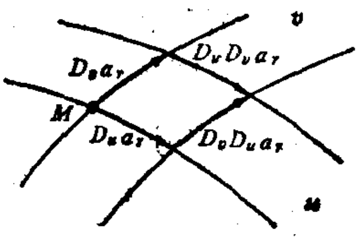


图4-2 沿两个方向协变微分的不可对易性

将式(4-2-3)中的$D_u a_\gamma$代替式(4-2-4)中的a_γ，得到

$$D_v D_u a_\gamma = d_v d_u a_\gamma - d_v(\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} a_\lambda d_u x^\beta)$$
$$- \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} d_u a_\lambda d_v x^\beta + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} a_\mu d_u x^\alpha d_v x^\beta$$
$$= d_v d_u a_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} a_\lambda d_v d_u x^\beta -$$

$$-\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(d_v a_\lambda d_u x^\beta + d_u a_\lambda d_v x^\beta)$$
$$-d_v\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\cdot a_\lambda d_u x^\beta + \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}a_\mu d_u x^\alpha d_v x^\beta$$

对于$D_u D_v a_\gamma$也有类似的式子，只不过是脚标u和v互换。显然，在u和v互换时，上式右方的头两项不变；对于第三项说来，只不过是括号中作和的两项交换位置，因而整个第三项也不变。因此，在$D_v D_u a_\gamma$和$D_u D_v a_\gamma$相减时，这三项消去。于是有

$$\begin{aligned} D_v D_u a_\gamma - D_u D_v a_\gamma = \\ = -d_v\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}a_\lambda d_u x^\beta + \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}a_\mu d_u x^\alpha d_v x^\beta \\ + d_u\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\cdot a_\lambda d_v x^\beta - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}a_\mu d_v x^\alpha d_u x^\beta. \end{aligned}$$

将

$$d_i\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}d_i x^\alpha \quad (i=u,v)$$

代入上式，并在第二和第三项中交换哑标$\alpha\rightleftharpoons\beta$，在第二和第四项中交换哑标$\lambda\rightleftharpoons\mu$，得到：

$$\begin{aligned} (D_v D_u - D_u D_v)a_\gamma = \\ = \left(\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\right)\cdot a_\lambda d_u x^\beta d_v x^\alpha \end{aligned}$$

引进一个符号

$$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\ \lambda} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}, \quad (4\text{-}2\text{-}5)$$

则上式成为

$$(D_v D_u - D_u D_v)a_\gamma = R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\ \lambda}a_\lambda d_v x^\alpha d_u x^\beta. \quad (4\text{-}2\text{-}6)$$

我们看到，对a_γ按不同次序进行协变微分的差，线性地依赖于a_λ及$d_v x^\alpha$，$d_u x^\beta$；这一线性关系的系数是一个四阶张量$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\ \lambda}$。这一张量标志了在不同方向上按相反次序进行协

变微分之差；而这一差值的存在又是由于空间弯曲，差值的大小标志空间弯曲的程度．因此，张量 $R_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\lambda}$ 是空间弯曲程度的标志，称为**曲率张量**（又叫做**黎曼-克利斯托菲张量**）．

三、曲率张量的性质

曲率张量的定义式(4-2-5)可写为

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\lambda} &= A_{\beta,\alpha\gamma}^{\lambda} - A_{\alpha,\beta\gamma}^{\lambda} \\ A_{\beta,\alpha\gamma}^{\lambda} &= \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{4-2-7}$$

由此立即看出，$R_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\lambda}$ 对头两个下标 $\alpha\beta$ 反对称

$$R_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\lambda} = -R_{\beta\alpha,\gamma}{}^{\lambda}. \tag{4-2-8}$$

利用曲率张量不仅可以写出协变张量场 a_{γ} 的交错协变微分(4-2-6)，而且可以写出逆变张量场 a^{λ} 的交错协变微分．为此考虑标量场 $a^{\gamma}b_{\gamma}$，它的协变微分是

$$D_u(a^{\gamma}b_{\gamma}) = D_u a^{\gamma}\cdot b_{\gamma} + a^{\gamma}\cdot D_u b_{\gamma}$$

再沿 v 方向求一次协变微分

$$\begin{aligned} D_vD_u(a^{\gamma}b_{\gamma}) = D_vD_ua^{\gamma}\cdot b_{\gamma} + D_ua^{\gamma}\cdot D_vb_{\gamma} + D_va^{\gamma}\cdot D_ub_{\gamma} \\ + a^{\gamma}\cdot D_vD_ub_{\gamma}. \end{aligned} \tag{4-2-9}$$

由于 $a^{\gamma}b_{\gamma}$ 是标量场，对它的协变微分等于通常的微分，因而

$$(D_vD_u - D_uD_v)(a^{\gamma}b_{\gamma}) = (d_vd_u - d_ud_v)(a^{\gamma}b_{\gamma}) = 0.$$

在式(4-2-9)中交换 u、v 再相减，右边第二、三项消去，于是有

$$(D_vD_u - D_uD_v)a^{\gamma}\cdot b_{\gamma} + a^{\gamma}\cdot(D_vD_u - D_uD_v)b_{\gamma} = 0$$

改写第一项的哑标为 λ，将第二项移到右边并利用式(4-2-6)，得到

$$(D_v D_u - D_u D_v) a^\lambda \cdot b_\lambda = -R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} a^\gamma d_v x^\alpha d_u x^\beta b_\lambda$$

这一式子对任意b_λ都成立，因而有

$$(D_v D_u - D_u D_v) a^\lambda = -R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} a^\gamma d_v x^\alpha d_u x^\beta. \tag{4-2-10}$$

这是逆变张量场a^λ的交错协变微分公式。

为了进一步得到曲率张量的更多性质，需要用到空间无挠率的假定，即联络对两个下标对称(4-1-13)：

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad .$$

在此情况下，按式(4-2-7)定义的$A_{\beta,\alpha\gamma}^{\lambda}$对指标$\alpha\gamma$对称

$$A_{\beta,\alpha\gamma}^{\lambda} = A_{\beta,\gamma\alpha}^{\lambda} \quad . \tag{4-2-11}$$

将式(4-2-7)的第一式对指标$\alpha\beta\gamma$轮换得到：

$$R_{\beta\gamma,\alpha}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} = A_{\gamma,\beta\alpha}^{\lambda} - A_{\beta,\gamma\alpha}^{\lambda}$$

$$R_{\gamma\alpha,\beta}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} = A_{\alpha,\gamma\beta}^{\lambda} - A_{\gamma,\alpha\beta}^{\lambda}$$

将此二式和式(4-2-7)的第一式相加，注意 到 式(4-2-11)，可看到右边的三个正项和三个负项正好相消，因而有

$$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} + R_{\beta\gamma,\alpha}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} + R_{\gamma\alpha,\beta}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} = 0. \tag{4-2-12}$$

这一重要恒等式称为**李奇恒等式**。

对曲率张量求协变导数可以得到另一个重要恒等式

$$\nabla_\mu R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} + \nabla_\alpha R_{\beta\mu,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda} = 0, \tag{4-2-13}$$

称为**皮安琪恒等式**。对此的证明从略。

四、协变曲率张量

在曲率张量$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda}$的定义式(4-2-5)中只包含联络，因而适用于任意的仿射联络空间。我们感兴趣的是有联络的黎曼空间，因而有度规张量$g_{\alpha\beta}$可供利用。利用它将$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\ \cdot\lambda}$的上标降下来，得到

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\;\cdot\;\lambda}g_{\lambda\delta}\ ,\tag{4-2-14}$$

称为**协变曲率张量**。

将联络和度规张量的关系式(4-1-23)代入曲率张量的定义式(4-2-5)，再代入式(4-2-14)，经过化简得到

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta\partial x^\delta}-\frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha\partial x^\delta}\right)+g_{\mu\nu}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\delta}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma})。\tag{4-2-15}$$

注意到联络对下标的对称性(4-1-13)，不难看出上式右方在$\alpha\rightleftharpoons\gamma$，$\beta\rightleftharpoons\delta$时不变，因此协变曲率张量在前、后两对指标交换（而保持每对指标的内部顺序）时不变。

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=R_{\gamma\delta,\alpha\beta}\ ,\tag{4-2-16}$$

由于曲率张量$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\;\cdot\;\lambda}$对头两个指标反对称（参看(4-2-8)），所以协变曲率张量也对头两个指标反对称

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=-R_{\beta\alpha,\gamma\delta}\ .\tag{4-2-17}$$

和式(4-2-16)结合可见，$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$对后一对指标也反对称

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=-R_{\alpha\beta,\delta\gamma}\ .\tag{4-2-18}$$

注意，曲率张量$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\;\cdot\;\lambda}$所满足的李奇恒等式中的三项只是前三个指标轮换，而最后一个上标λ保持不动。因此，将这一指标下降后得到的协变曲率张量$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$也满足类似的恒等式：

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}+R_{\beta\gamma,\alpha\delta}+R_{\gamma\alpha,\beta\delta}=0。\tag{4-2-19}$$

五、李奇张量与标量曲率

我们看到，曲率张量是4阶张量。利用指标缩并，可以从它得到较低阶的张量。

将$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$的第二和第四指标缩并，得到一个二阶张量

$$R_{\alpha\beta}=R_{\alpha\delta\beta}^{\cdot\cdot\cdot\delta}=g^{\gamma\delta}R_{\alpha\delta\beta\gamma}$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial x^{\delta}}-\frac{\partial\Gamma_{\delta\beta}^{\delta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\delta\mu}^{\delta}-\Gamma_{\beta\delta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\delta}, \quad (4-2-20)$$

称为**李奇张量**。

容易证明，李奇张量是对称二阶张量。实际上，根据协变曲率张量的对称性质式(4-2-16)，将式(4-2-20)中前、后两对指标换位，得到

$$R_{\alpha\beta}=g^{\gamma\delta}R_{\alpha\delta,\beta\gamma}=g^{\gamma\delta}R_{\beta\gamma,\alpha\delta}$$

由于$g^{\gamma\delta}$对$\gamma\delta$对称，所以上式右方等于$R_{\beta\alpha}$。因而有

$$R_{\beta\alpha}=R_{\alpha\beta}. \quad (4-2-21)$$

进一步将李奇张量的指标缩并，得到一个标量

$$R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad (4-2-22)$$

称为**标量曲率**。

六、二维黎曼空间的高斯曲率

对于二维黎曼空间，α，β，γ，δ都只能取1，2两个值。此时，曲率张量$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$只有一个实质性的分量$R_{12,12}$：

$$R_{12,12}=R_{21,21}=-R_{12,21}=-R_{21,12}. \quad (4-2-23)$$

它和**高斯曲率**K的关系是：

$$K=\frac{R_{12,12}}{\det g_{\alpha\beta}}. \quad (4-2-24)$$

【例】 计算半径为r的球面的标量曲率和高斯曲率。

解 采用球坐标，如式(3-1-21)，其中r为常数。它是正交曲线坐标，其拉梅系数由式(3-1-22)的后二式给出：

$$H_{\theta}=r, \quad H_{\varphi}=r\sin\theta. \quad (4-2-25)$$

度规张量（(3-2-19)、(3-2-20)）是

$$g_{\alpha\beta}=H_{\alpha}^{2}\delta_{\alpha\beta},\quad g^{\alpha\beta}=\frac{1}{H_{\alpha}^{2}}\delta_{\alpha\beta}. \tag{4-2-26}$$

而联络(3-3-16)是

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\frac{1}{H_{\alpha}^{2}}\left(\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\beta}}\delta_{\alpha\gamma}+\frac{\partial H_{\beta}^{2}}{\partial x^{\gamma}}\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\alpha}}\delta_{\gamma\beta}\right), \tag{4-2-27}$$

（对α，β，γ不作和）。

将式(4-2-25)代入式(4-2-27)，得到联络不为零的分量：

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{2}\sin 2\theta,\qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}=\mathrm{ctg}\theta. \tag{4-2-28}$$

代入式(4-2-5)，得到曲率张量的不为零的分量：

$$\left.\begin{aligned}&R_{\theta\varphi.\ \varphi}^{\cdot\cdot\ \cdot\theta}=-R_{\varphi\theta.\ \varphi}^{\cdot\cdot\ \cdot\theta}=-\sin^{2}\theta,\\&R_{\theta\varphi.\ \theta}^{\cdot\cdot\ \cdot\varphi}=-R_{\varphi\theta.\ \theta}^{\cdot\cdot\ \cdot\varphi}=1.\end{aligned}\right\} \tag{4-2-29}$$

和式(4-2-26)一道代入式(4-2-14)得到协变曲率张量的不为零的分量：

$$\begin{aligned}R_{\theta\varphi.\ \theta\varphi}&=-R_{\varphi\theta.\ \theta\varphi}=-R_{\theta\varphi.\ \varphi\theta}=R_{\varphi\theta.\ \varphi\theta}\\&=r^{2}\sin^{2}\theta.\end{aligned} \tag{4-2-30}$$

代入式(4-2-20)，得到李奇张量的不为零的分量：

$$R_{\theta\theta}=1,\quad R_{\varphi\varphi}=\sin^{2}\theta. \tag{4-2-31}$$

再代入式(4-2-22)，得到标量曲率

$$R=\frac{2}{r^{2}}. \tag{4-2-32}$$

由式(4-2-25)、(4-2-26)有

$$\det g_{\alpha\beta}=\begin{vmatrix}r^{2}&0\\0&r^{2}\sin^{2}\theta\end{vmatrix}=r^{4}\sin^{2}\theta. \tag{4-2-33}$$

和式(4-2-30)一道代入式(4-2-24)，得到高斯曲率

$$K=\frac{r^{2}\sin^{2}\theta}{r^{4}\sin^{2}\theta}=\frac{1}{r^{2}}. \qquad (4-2-34)$$

可见，球面的高斯曲率等于半径的负2次方。

§4-3 黎曼空间的测地线

一、测地线的定义

在平直空间的一个连通区域的两点之间可以连接各种不同的线，其中有一种特殊的线——直线。在两点之间有一条而且只有一条直线。

仿射联络空间和黎曼空间一般说来是弯曲的，其中只有曲线而没有直线。在这类空间的两点之间有没有类似于平直空间中的直线那样的特殊的线呢？答案是肯定的：有，那就是测地线。

弯曲空间中的测地线有哪些和平直空间中的直线相类似的性质呢？要回答这个问题，先要问：平直空间中的直线的本质性质是什么？当然，直线是直的，但是这只是表观的性质，而不是本质的性质。这一性质依赖于空间的平直性，不能推广到弯曲空间。

平直空间中直线的本质性质是：

(1) 在某一点和直线相切的矢量，在沿这一直线平行移动时，始终和这一直线相切；

(2) 在两点之间联接的各种线中，以直线为最短。

这两点是平直空间中直线的本质性质，将它们推广到弯曲空间，就得到测地线。

在仿射联络空间中没有度规张量，不能比较弧的长短，

因而测地线只能具有上述第一点性质。

定义 过仿射联络空间的一点作一根曲线，假定和这根曲线相切的矢量沿这一曲线平行移动时，始终和它相切，则称这一曲线为**测地线**。

在有联络的黎曼空间中，也可以用这作为测地线的定义。在此情况下可以进一步证明，测地线具有和平直空间中的直线类似的第2条性质，在本节中将给出这一证明。

二、测地线的微分方程

设一曲线C的参数方程是

$$x^\alpha = x^\alpha(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{4-3-1}$$

过这曲线上一点M的矢量

$$a^\alpha(M) = \left.\frac{dx^\alpha}{dt}\right|_M \tag{4-3-2}$$

和这曲线在M点相切。按定义，如果曲线是测地线，则将a^α沿曲线C平行移动到N点所得到的矢量$a^\alpha(N)$仍然和这一曲线相切，因而和$(dx^\alpha/dt)_N$只差一常数因子：

$$a^\alpha(N) = \lambda \left.\frac{dx^\alpha}{dt}\right|_N. \tag{4-3-3}$$

可以设法将比例常数λ吸收到参数中去。为此，选新参数为

$$\tau = \int_a^t \frac{dt}{\lambda(t)}. \tag{4-3-4}$$

由此解出t，代入式(4-3-1)，得到以τ为参数的曲线方程

$$C: \; x^\alpha = x^\alpha(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \int_a^b \frac{dt}{\lambda(t)}. \tag{4-3-5}$$

由式(4-3-4)，

$$d\tau = \frac{dt}{\lambda(t)}, \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

故

$$\left.\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right|_N = \lambda \left.\frac{dx^\alpha}{dt}\right|_N = a^\alpha(\cdot\cdot).$$

这里的N是曲线C上的任意点，所以，当以τ为 数时，在曲线C的任意点上都有

$$a^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

按平行移动的公式(4-1-14)，

$$da^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta dx^\gamma,$$

因而，由式(4-3-7)有

$$d\frac{dx^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}dx^\gamma.$$

用$d\tau$除，得到

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}. \qquad (4\text{-}3\text{-}8)$$

这就是测地线的微分方程。

方程(4-3-8)是$x^\alpha(\tau)$的二阶常微分方程。在初始条件

$$(x^\alpha)_{\tau=\tau_0} = a^\alpha, \quad \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = b^\alpha \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

之下，这一方程有唯一确定的解。这表明，过空间的任一点

$$M: \ x^\alpha = a^\alpha \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

沿任一方向

$$\left.\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right|_M = b^\alpha \qquad (4\text{-}3\text{-}11)$$

有一条而且只有一条测地线。

对于平直的空间，可以选取仿射坐标，使联络$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$，此时测地线方程成为直线的方程

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=0 .$$

因此，平直空间中的测地线是直线。

三、黎曼空间中的测地线

以上在给出测地线的定义和推导测地线微分方程时，没有用到空间的度量性质，因而适用于任意仿射联络空间。

现在假定所讨论的是黎曼空间。此时，以上所给出的测地线的定义和测地线的微分方程仍然适用。除此以外，还可以计算沿测地线的弧长。

首先应该注意，如果所讨论的是伪黎曼空间，则弧长平方的二次型(4-1-10)不是正定的。沿某些方向弧长为零。在这种方向上的测地线称为迷向的。以下只考虑非迷向的测地线，弧长可能是实数（弧长的平方大于零）或虚数（弧长的平方小于零），但不等于零。

现在来讨论非迷向曲线的弧长并证明：当固定两个端点时，所有这些弧长中以非迷向测地线的弧长最短[注]。

证 设非迷向曲线的参数方程为

$$C:\ x^{\alpha}=x^{\alpha}(\lambda). \tag{4-3-12}$$

令

$$F=g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}, \tag{4-3-13}$$

则根据式(4-1-10)，曲线C的弧长为

〔注〕更确切地说，是有极值.

$$s=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F^{1/2}\,d\lambda. \tag{4-3-14}$$

对于不同的曲线C，x^α是λ的不同函数，由式(4-3-14)得到不同的s值。因此，s是$x^\alpha(\lambda)$的泛函：

$$s=s[x^\alpha(\lambda)]\,. \tag{4-3-15}$$

弧长为极值的条件是泛函s的变分为零：

$$\delta s=\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F^{1/2}\,d\lambda=0\,. \tag{4-3-16}$$

由式(4-3-13)知，$F^{1/2}$是x^α（包含在$g_{\alpha\beta}$中）和$\dot{x}^\alpha\equiv dx^\alpha/d\lambda$的函数。因而

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}F^{1/2}\,d\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha+\frac{\partial F^{1/2}}{\partial\dot{x}^\alpha}\delta\dot{x}^\alpha\right)d\lambda=0$$

将

$$\delta\dot{x}^\alpha=\delta\frac{dx^\alpha}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}(\delta x^\alpha)$$

代入上式，并进行分部积分，得到

$$0=\frac{\partial F^{1/2}}{\partial\dot{x}^\alpha}\delta x^\alpha\bigg|_{\lambda_1}^{\lambda_2}+\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^\alpha}-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)\right]\delta x^\alpha d\lambda. \tag{4-3-17}$$

我们所考虑的是两个端点固定不变的那些曲线的弧长，因而在端点处($\lambda=\lambda_1$和$\lambda=\lambda_2$)，$\delta x^\alpha=0$。这样，上式右方第一项为零。而在第二项中，变分δx^α是任意的，因而要使积分为零，必须被积函数为零。即有

$$\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^\alpha}-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)=0. \tag{4-3-18}$$

这就是泛函极值(4-3-16)的欧拉方程。

由式(4-3-18)，

$$\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}-\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right]=0.$$

或

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F^{1/2}}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}+\frac{1}{F^{1/2}}\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\frac{1}{F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}=0.$$

去掉公共因子$1/F^{1/2}$并将第一项写成第三项，得到

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}-\frac{1}{2F}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\frac{dF}{d\lambda}=0. \tag{4-3-19}$$

我们可以选沿曲线的弧长s作为曲线的参数λ，从而$\dot{x}^{\alpha}=dx^{\alpha}/ds$。因而，式(4-3-13)成为

$$F=g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}, \tag{4-3-20a}$$

由此有

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}=2g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\beta}}{ds}=2g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\beta}, \tag{4-3-20b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}. \tag{4-3-20c}$$

另一方面，按定义式(4-1-10)，当取s为参数时，

$$ds=F^{1/2}ds$$

所以沿整个曲线C，F保持为常数

$$\frac{dF}{ds}=0. \tag{4-3-21}$$

将式(4-3-20)、(4-3-21)代入式(4-3-19)，得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \\
&= \frac{d}{ds}(2g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta) - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma \\
&= 2g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + 2\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}
\end{aligned}
$$

将右边第二项的因子2写成两项之和，并在其中的一项中交换哑标$\beta\rightleftharpoons\gamma$，得到

$$
g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0。\tag{4-3-22}
$$

比较式(4-1-22)，可见，第二项的系数正是第一类克利斯托非符号。将指标α改写为λ，和$g^{\alpha\lambda}$缩并，利用式(4-1-23)，得到

$$
\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0
$$

这正是测地线的微分方程(4-3-8)。这就证明，使弧长取极值的非迷向曲线是非迷向测地线。 ▮

§4-4 广义相对性原理

在这一节里，我们简单地讨论在物理学中应用弯曲空间的两个例子。它们分别来源于四维时空中的广义相对性原理（广义相对论）和电荷空间中的广义相对性原理（局域规范理论）。

一、有引力场存在时时空的弯曲

引力场有一个重要的基本特性，即：不论质量或电荷如何，只要有相同的初始条件，一切物体在引力场中都会以相同的方式运动。这一特性和引力质量等于惯性质量的基本事实相联系。它使得在引力场中的运动和在没有引力场的非惯性系中的运动看起来没有差别。

在非惯性参考系中，时空度规是弯曲的。从一个简单例子可以看到这一点。在惯性参考系中，用直角坐标，时空间隔的平方是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \tag{4-4-1}$$

变换到沿 x 方向以加速度 a 运动的非惯性系：

$$x = x' + \frac{a}{2}t^2, \quad y = y', \quad t = t',$$

时空间隔的平方成为

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (c^2 - a^2t^2)dt^2 + 2atdx'dt.$$

可以将它写为（略去撇号）：

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{4-4-2}$$

其中的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 不是常张量。不管时间 t 的变换规律如何，也不能把这个式子化成时空坐标的平方和（差）的形式〔注〕。这样的 x^α 是弯曲坐标，见式(3-2-21)。

以上例子说明，在非惯性系中，时空坐标是弯曲的。然而，如果不存在引力场，总可以通过坐标变换，变到惯性

〔注〕 如果是仿射坐标系，度规张量是常张量，就总可以把它对角化，并使对角元素变为±1。

系，使度规张量成为常张量，相应的时空坐标是平直的闵可夫斯基坐标。当有引力场存在时，情况就不同。物理的引力场总是非均匀的，在无穷远处它必定趋于零，而不能保持为常数。因此无论如何进行坐标变换也不能把它完全消除掉。用数学语言说就是，在有引力场存在的情况下，时空度规张量$g_{\alpha\beta}$是时空坐标的函数，无论怎样进行坐标变换也不能把它在整个时空中变成常张量。因此，有引力场存在的时空是弯曲的黎曼空间，在这一空间中，不存在特殊的惯性系，一切参考系都是非惯性系，它们都能等效地用来描述物理规律，这就是**爱因斯坦的广义相对性原理。**

从爱因斯坦的广义相对性原理出发可以建立引力场的理论。这里不赘述，只举质点在引力场中的运动作为一个简单例子。

考虑质点在引力场中的运动。在没有引力场时，质点沿直线运动，其方程是

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=0. \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

在有引力场存在的情况下，质点沿黎曼空间中的测地线运动，其方程是式(4-3-8)：

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}=0. \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

其中出现的联络$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$就代表引力场。

二、基本粒子的内部对称性

弯曲空间在近代物理学中的另一个重要应用是用到基本粒子的内部对称性上。

不考虑引力场，因而四维时空仍然是平直的闵可夫斯基

空间。但是，除了四维时空以外，基本粒子还有内部自由度。这种内部自由度所在的空间称为**电荷空间**。

按照量子场论，基本粒子由场算符$\psi_i(x)$描述，它共有m个分量($i=1,2,\cdots,m$)，每个分量都是时空坐标$x(x^0,x^1,x^2,x^3)$的函数〔注〕。

考虑用$m\times m$维么正矩阵$U=(U^j_i)$对$\psi_i(x)$进行的变换

$$\psi_i \longrightarrow \psi'_i=(U\psi)_i=U^j_i\psi_j. \tag{4-4-5}$$

其中的变换矩阵U依赖于n个连续变化的实参量$\theta_a(a=1,2,\cdots,n)$：

$$U=U(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n). \tag{4-4-6}$$

变换式(4-4-5)称为**规范变换**。如果系统对规范变换式(4-4-5)不变，则称这一系统具有**规范不变性**。

可以将ψ_i看成是电荷空间中的一阶张量，而将式(4-4-5)看成是这一张量所经受的“坐标变换”。电荷空间中的广义相对性原理要求运动方程不仅对于四维时空中的洛仑兹变换是协变的，而且对于电荷空间中的变换式(4-4-5)也是协变的。换句话说，运动方程不仅应是四维时空中的张量等式，也应是电荷空间中的张量等式。

在运动方程中除了场算符ψ_i以外，还包含有场算符的时空导数$\partial_\mu\psi_i$。为了使运动方程具有协变性，必需$\partial_\mu\psi_i$和ψ_i有相同的变换规律。即要求$\partial_\mu\psi_i$和ψ_i一样，也是电荷空间中的一阶张量。如果变换矩阵U与时空点x^μ无关，则这一要求自然满足：

$$\partial_\mu\psi_i \longrightarrow \partial_\mu\psi'_i=\partial_\mu(U^j_i\psi_j)=U^j_i(\partial_\mu\psi_j) \tag{4-4-7}$$

〔注〕 如果粒子有自旋，则场算符还有自旋自由度．这里忽略这种情况，只讨论无自旋的粒子．

因此，由ψ_i和$\partial_\mu\psi_i$组成的运动方程能够满足电荷空间中的协变性要求。

但是，如果变换矩阵U与时空点x^μ有关，情况就不同了。这样的变换称为**局域规范变换**。在局域规范变换下，不同时空点的场算符经受不同的规范变换。此时，$\partial_\mu\psi_i$不再按电荷空间的张量规律变：

$$\partial_\mu\psi_i\longrightarrow\partial_\mu\psi'_i=\partial_\mu(U_i^j\psi_j)=U_i^j\partial_\mu\psi_j+(\partial_\mu U_i^j)\psi_j\,.$$

为了得到一个在电荷空间中服从张量变换规律的求导算符，应该仿照式(3-4-8)引进协变导数〔注〕：

$$\partial_\mu\longrightarrow(\nabla_\mu)_j^i\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta_j^i-\Gamma_{\mu j}^i\,. \tag{4-4-8}$$

注意，这里的"联络"$\Gamma_{\mu j}^i$的三个指标中，有两个指标(i, j)是电荷空间的指标，而另一指标(μ)是四维时空的指标。在ψ_i经受规范变换式(4-4-5)时，$\Gamma_{\mu j}^i$的指标i、j经受变换，而指标μ不变。因而在引用(3-4-5)、(4-1-11)等公式时，应该令$\beta'=\beta\to\mu$，$\alpha,\gamma\to i,j$，$\alpha',\gamma'-i',j'$，从而有

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\longrightarrow U_i^{i'},\qquad\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\longrightarrow(U^{-1})_i^{i'},$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\longrightarrow1\,. \tag{4-4-9}$$

因此，按照式(3-4-5)，当ψ_i经受变换(4-4-5)时，协变导数的变换是

$$\nabla_\mu\psi_i\equiv(\partial_\mu\delta_i^j-\Gamma_{\mu i}^j)\psi_j\longrightarrow U_i^{i'}(\partial_\mu\delta_i^j-\Gamma_{\mu i}^j)\psi_j$$

〔注〕在现在所讨论的问题中，有两个空间——四维时空和电荷空间．恰当地描述这类问题的数学工具是纤维丛．这超出了本书的范围．但是，仅仅只是形式地引用前面的一些公式，也能得到很多有用的结果，如式(4 4-8)、(4-4-13)、(4-4-19)．

$$\equiv U_{i'}^{i} \nabla_\mu \psi_i. \qquad (4\text{-}4\text{-}10)$$

它和ψ_i的变换式(4-4-5)相同，都是电荷空间中的一阶张量，因而用ψ_i和协变导数$\nabla_\mu\psi_i$组成的运动方程能满足电荷空间中的协变性要求。

我们看到，要求运动方程除了四维时空中的洛仑兹协变性以外还有电荷空间的协变性，自动导致除物质场$\psi_i(x)$以外出现新的场$\Gamma_{\mu j}^{i}(x)$。按式(4-1-11)，$\Gamma_{\mu j}^{i}$的变换规律是：

$$\Gamma_{\mu j}^{i} \longrightarrow \Gamma_{\mu j'}^{i'} = U_{j}^{i'} \Gamma_{\mu j}^{i} (U^{-1})_{i}^{j'} + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} U_{j'}^{i'}\right)(U^{-1})_{i}^{j'}.$$

$$(4\text{-}4\text{-}11)$$

它可以按电荷空间的指标i j排成一个矩阵：

$$\Gamma_{\mu j}^{i}(x) \equiv [A_\mu(x)]_j^i \qquad (4\text{-}4\text{-}12)$$

这一矩阵的每个分量都是四维时空中的一阶张量场（即矢量场）$[A_\mu(x)]_j^i$，称为**规范场**。

将式(4-4-12)代入式(4-4-11)得到规范场的变换规律。它可以写成电荷空间中矩阵乘法的形式：

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x)' = U A_\mu(x) U^{-1} + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} U\right) U^{-1}.$$

$$(4\text{-}4\text{-}13)$$

在物质场受到变换(4-4-5)的同时，规范场受到变换(4-4-13)。这样得到的场$\psi(x)'$，$A_\mu(x)'$和原有的场$\psi(x)$，$A_\mu(x)$一样，描述同一物理情况。这就是推广到**电荷空间的相对性原理**。现代的粒子物理理论就建立在这一原理的基础上。

利用$\Gamma_{\mu j}^{i}$可以定义平行移动。仿照式(4-1-16)，如果沿

曲线

$$C: x^{\mu}=x^{\mu}(\tau) \qquad (4\text{-}4\text{-}14)$$

移动dx^{μ}时，ψ_i的改变是

$$d\psi_i=\Gamma_{\mu i}^{j}\psi_j dx^{\mu}\ , \qquad (4\text{-}4\text{-}15)$$

就称ψ_i沿曲线C平行移动。

仿照式(4-2-6)可以写出对ψ_i的交错协变微分的公式

$$(D_{\nu}D_{\mu}-D_{\mu}D_{\nu})\psi_i=R_{\mu\nu;\,i}^{\ \ \ \ j}\psi_j d_{\nu}x^{\mu}d_{\mu}x^{\nu}. \qquad (4\text{-}4\text{-}16)$$

其中的“曲率张量”$R_{\mu\nu;\,i}^{\ \ \ \ j}$按式(4-2-5)定义：

$$R_{\mu\nu;\,i}^{\ \ \ \ j}=\frac{\partial\Gamma_{\mu i}^{j}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\Gamma_{\nu i}^{j}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma_{\mu i}^{k}\Gamma_{\nu k}^{j}-\Gamma_{\nu i}^{k}\Gamma_{\mu k}^{j}.$$

(4-4-17)

由$R_{\mu\nu;\,i}^{\ \ \ \ j}$的指标构成可以看出，它是电荷空间中的二阶张量，可以排成矩阵：

$$R_{\mu\nu;\,i}^{\ \ \ \ j}\equiv[F_{\mu\nu}(x)]_i^j\ . \qquad (4\text{-}4\text{-}18)$$

它的每一个分量都是四维时空中的二阶反对称张量场$[F_{\mu\nu}(x)]_i^j$。

按式(4-4-12)定义的$A_{\mu}(x)$（略去电荷空间的矩阵指标，下同）是规范场的**势**，而按式(4-4-18)定义的$F_{\mu\nu}(x)$是规范场的**场强**。它们之间的关系可以通过将式(4-4-12)、(4-4-18)代入(4-4-17)而得到：

$$F_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}+[A_{\mu},A_{\nu}]. \qquad (4\text{-}4\text{-}19)$$

右方的括号代表两个矩阵的对易子：

$$[A_{\mu},A_{\nu}]\equiv A_{\mu}A_{\nu}-A_{\nu}A_{\mu}. \qquad (4\text{-}4\text{-}20)$$